

8 PROBLEMAS MÉTRICOS

EJERCICIOS PROPUESTOS

- 8.1 Las dimensiones de las hojas de un libro de texto de 80 páginas son 20×30 centímetros.

Si se extendieran, sin solaparse, todas las hojas del libro sobre el suelo, ¿qué superficie ocuparían?

Número de hojas del libro: 40

Superficie de una hoja: $20 \cdot 30 = 600 \text{ cm}^2$

Superficie que ocuparían: $40 \cdot 600 = 24000 \text{ cm}^2 = 2,4 \text{ m}^2$

- 8.2 El volumen de un cubo es numéricamente igual a su área total. Tomando como unidad el centímetro, calcula cuánto miden su arista, su superficie y su volumen.

Sea x la medida de la arista.

$$x^3 = 6x^2 \Rightarrow x^2(x - 6) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 6$$

Solución válida: $x = 6$

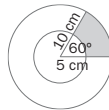
a) Medida de la arista: 6 cm

b) Medida del área: $6x^2 = 216 \text{ cm}^2$

c) Medida del volumen: $x^3 = 216 \text{ cm}^3$

- 8.3 Calcula el área de un trapecio circular cuyos radios mayor y menor miden 10 y 5 centímetros, respectivamente, y que abarca un ángulo de 60° .

$$A = \left(\frac{\pi \cdot R^2}{6} - \frac{\pi \cdot r^2}{6} \right) = \frac{\pi}{6} (100 - 25) = \frac{75\pi}{6} = \frac{25\pi}{2} = 39,27 \text{ cm}^2$$



- 8.4 Las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo son tres múltiplos consecutivos de 3. Halla las dimensiones de sus lados y el área del triángulo.

Medida de los tres lados consecutivos: $x - 3, x, x + 3$

Teorema de Pitágoras: $(x - 3)^2 + x^2 = (x + 3)^2$

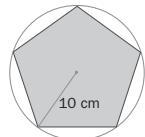
Se opera: $x^2 - 6x + 9 + x^2 = x^2 + 6x + 9 \Rightarrow x^2 - 12x = 0 \Rightarrow x(x - 12) = 0$.

Soluciones de la ecuación: $x = 0, x = 12$. La primera solución no es válida.

Medidas de los lados: catetos: 9, 12; hipotenusa: 15

$$A_{\text{triángulo}} = \frac{9 \cdot 12}{2} = 54$$

- 8.5 Halla el área del pentágono que aparece en la figura.



El radio de la circunferencia inscrita se corresponde con la apotema: r .

El radio de la circunferencia circunscrita se corresponde con el radio del octógono: R .

Ángulo central = $360^\circ : 5 = 72^\circ$ $2\alpha = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$ $\alpha = 54^\circ$

$$\frac{10}{\sin 54^\circ} = \frac{x}{\sin 72^\circ} \Rightarrow x = 11,76 \text{ cm}$$

$$ap^2 = 10^2 - 5,88^2 = 65,43 \Rightarrow ap = 8,09 \text{ cm}$$

$$A = \frac{11,76 \cdot 5 \cdot 8,09}{2} = 237,85 \text{ cm}^2$$

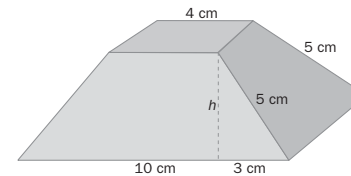
- 8.6 Halla el área de las bases y el área total de un cilindro de 5 centímetros de radio y 12 de altura.

a) Área de las bases: $2\pi r^2 = 2 \cdot 25\pi = 50\pi \text{ cm}^2 = 157,01 \text{ cm}^2$

b) Área lateral: $2\pi rh = 2\pi \cdot 5 \cdot 12 = 120\pi \text{ cm}^2 = 377 \text{ cm}^2$

c) Área total: $157,01 + 377 = 534,01 \text{ cm}^2$

- 8.7 Calcula el área lateral y el área total del tronco de pirámide de la figura.



Para calcular la apotema que corresponde a la hipotenusa del triángulo rectángulo señalado en la figura:

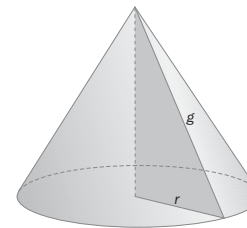
$$25 = h^2 + 9 \Rightarrow h = 4 \text{ cm}$$

$$\text{Se calcula el área lateral: } A_l = \frac{(P + p) \cdot A}{2}$$

$$A_l = \frac{(40 + 16) \cdot 4}{2} = 112 \text{ cm}^2$$

$$A_r = A_b + A_b + A_l = 16 + 100 + 112 = 228 \text{ cm}^2$$

- 8.8 La generatriz de un cono mide 10 decímetros, y su altura, 80 centímetros. Calcula su área lateral y su área total.

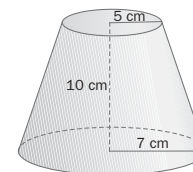


Se aplica Pitágoras para calcular el radio r : $r = \sqrt{g^2 - h^2} = 60 \text{ cm}$

$$A_l = \pi \cdot r \cdot g = 3,14 \cdot 60 \cdot 100 = 18840 \text{ cm}^2$$

$$A_r = A_l + A_b = A_l + \pi r^2 = 18840 + 11304 = 30144 \text{ cm}^2$$

- 8.9 La figura representa un tronco de cono de radios R y r . Calcula el área lateral y el área total.



Se resta el área de la base superior del radio de la base superior para obtener 2 cm, que es la distancia horizontal que las separa.

Según el triángulo rectángulo que vemos dibujado dentro de la figura calculamos la generatriz.

$$g = \sqrt{100 + 2^2} = 10,20 \text{ cm}$$

$$A_l = \pi \cdot r \cdot g = 3,14 \cdot 12 \cdot 10,20 = 384,34 \text{ cm}^2$$

$$A_r = A_l + A_b + A_b = A_l + \pi \cdot R^2 + \pi \cdot r^2$$

$$A_r = 153,86 + 78,5 + 384,34 = 616,70 \text{ cm}^2$$

- 8.10 Calcula el volumen de un ortoedro cuyas dimensiones sean $50 \times 80 \times 100$ milímetros.

$$\text{El volumen de un ortoedro es: } V = A_b \cdot h = 50 \cdot 80 \cdot 100 = 400000 \text{ mm}^3 = 400 \text{ cm}^3.$$

- 8.11 El volumen de un cubo es de 25 cm^3 . ¿Cuánto aumentará su volumen si se duplica la longitud de sus aristas?

$$\text{Ecuación: } x^3 = 25 \text{ cm}^3$$

$$\text{Volumen: } (2x)^3 = 8x^3 = 8 \cdot 25 = 200 \text{ cm}^3$$

$$\text{Incremento: } \frac{200 \text{ cm}^3}{25 \text{ cm}^3} = 8 \text{ veces mayor}$$

- 8.12 Dibuja un cilindro recto de 5 centímetros de radio y 12 centímetros de altura. Calcula su volumen.

a) La base del cilindro es un círculo de radio $r = 5 \text{ cm}$.

$$\text{Área de la base} = \pi r^2 = \pi \cdot 5^2 = 25\pi \text{ cm}^2$$

b) El área lateral del cilindro es el área de un rectángulo.

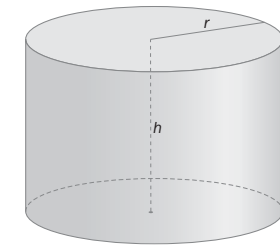
$$\text{Base del rectángulo: } 2\pi r$$

$$\text{Altura del rectángulo} = \text{altura del cilindro}$$

$$\text{Área lateral: } 2\pi \cdot 5 \cdot 12 = 120\pi \text{ cm}^2$$

c) Área de todo el cilindro: $120\pi + 25\pi = 145\pi \text{ cm}^2$

d) Volumen del cilindro: $25\pi \cdot 12 = 300\pi \text{ cm}^3$



- 8.13 Las aristas de dos cubos difieren en 2 centímetros, y sus volúmenes, en 56 cm³. Halla el valor de la longitud de las aristas de ambos cubos.

Medidas de las aristas: x , $x + 2$

Ecuación resultante: $(x + 2)^3 - x^3 = 56 \Rightarrow x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - x^3 = 56 \Rightarrow 6x^2 + 12x - 48 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0$

Soluciones: $x = -4$, $x = 2$

Medida de las aristas: $x = 2$ cm, 4 cm

- 8.14 Del prisma de la figura conocemos el área de sus caras. Sin resolver ningún sistema, calcula su volumen sabiendo que:

$$a \cdot b = 270 \text{ cm}^2$$

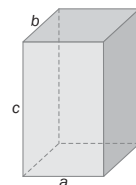
$$b \cdot c = 450 \text{ cm}^2$$

$$a \cdot c = 540 \text{ cm}^2$$

$$ab \cdot bc \cdot ac = a^2 b^2 c^2 = (abc)^2 = V^2$$

$$V^2 = ab \cdot bc \cdot ac = 270 \cdot 450 \cdot 540 = 6561000$$

El volumen del ortoedro es de 8100 cm³.



- 8.15 Sabiendo que el volumen de un cono mide 300 cm³, y su altura, 30 centímetros, calcula su generatriz.

$$V = 300 \text{ cm}^3 \quad V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h \Rightarrow A_b = \frac{3V}{h} = 30 \text{ cm}^2$$

$$h = 30 \text{ cm} \quad A_b = \pi \cdot r^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{A_b}{\pi}} = 3,1 \text{ cm}$$

La generatriz de un cono es $g = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{30^2 + 3,1^2} = 30,16 \text{ cm}$

- 8.16 El radio medio de la Tierra, suponiendo una esfera perfecta, es aproximadamente de 6370 kilómetros.

A partir de este dato, calcula:

a) La longitud del ecuador terrestre.

b) El área de la superficie terrestre.

a) Longitud del ecuador: $2\pi r = 2\pi \cdot 6370 \approx 40\,000 \text{ km}$

b) Área de la superficie terrestre: $4\pi r^2 = 4\pi \cdot 6370^2 \approx 510 \text{ millones de km}^2$

- 8.17 La anchura y la profundidad de una sala de música de forma rectangular suman 54 metros.

Si su superficie es de 720 m², ¿cuáles son las dimensiones de la sala?

Medidas de las dimensiones: x , $54 - x$

Ecuación de áreas: $x(54 - x) = 720$

Se opera: $54x - x^2 = 720$

Ecuación de segundo grado: $x^2 - 54x + 720 = 0$

Soluciones de la ecuación: $x = 30$, $x = 24$

Dimensiones de la sala: 30 m de largo, 24 m de ancho

- 8.18 Se quieren pintar las paredes y el techo de una sala de exposiciones que tiene forma de prisma hexagonal regular. La arista de la base mide 9 metros y la altura de la sala es de 12 metros.

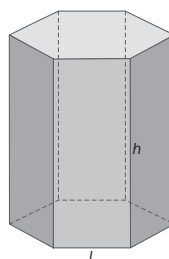
Halla la superficie total que va a ser pintada.

La base hexagonal se descompone en 6 triángulos equiláteros de lado 9 cm.

$$\text{Área de la base} = 6 \cdot 9^2 \cdot \sqrt{\frac{3}{16}} = 210,44 \text{ m}^2$$

$$\text{Área lateral: } 6 \cdot a_b \cdot h = 6 \cdot 9 \cdot 12 = 648 \text{ m}^2$$

$$\text{Superficie que va a ser pintada: } 648 + 210,44 = 858,44 \text{ m}^2$$



- 8.19 En clase de Tecnología, los alumnos van a construir el tablero de un juego de mesa como el de la figura. ¿Qué cantidad de madera (expresada en metros cuadrados) será necesaria, como mínimo, si son 20 alumnos en el aula?



$$\text{Apotema} = \frac{l}{2} / \text{tg} \left(\frac{360}{8} \right) = \frac{15}{0,41} = 36,21 \text{ cm}$$

$$A_{\text{octógono}} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \text{apotema} \cdot 30 = 4345,58 \text{ cm}^2$$

$$A_T = 4 \cdot 30^2 + 4345,58 = 7945,58 \text{ cm}^2$$

$$\text{La cantidad de madera necesaria será: } 20 \cdot 7945,58 = 158\,911,69 \text{ cm}^2 = 15,89 \text{ m}^2$$

- 8.20 Un aula tiene 12 metros de largo, 10 de ancho y 4 de alto. Si se llenase con bloques cúbicos de porexpán de 2 metros de arista, ¿podrías decir cuántos se necesitarían?

Si la clase tiene 20 alumnos y cada uno transporta el mismo número de bloques, ¿cuántos tendrá que mover cada alumno para rellenar completamente la clase?

$$V_{\text{aula}} = 12 \cdot 10 \cdot 4 = 480 \text{ m}^3$$

$$V_{\text{bloque}} = 2^3 = 8 \text{ m}^3$$

$$\text{Para llenar el aula hacen falta } \frac{480}{8} = 60 \text{ bloques cúbicos.}$$

Cada alumno moverá 3 bloques.

- 8.21 Se quiere levantar un monumento en forma de pirámide. Su base será cuadrada, y la altura prevista, de 30 metros.

Si se necesitan 811,2 m³ de piedra, ¿cuál es la medida de la arista de la base?

$$V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} \cdot a_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow a_{\text{base}} = \frac{3V_{\text{pirámide}}}{h} \Rightarrow a_{\text{base}} = \frac{3 \cdot 811,2}{30} = 81,12 \text{ m}^2$$

$$a_{\text{base}} = l^2 \Rightarrow l = \sqrt{81,12} = 9,01 \text{ m}$$

- 8.22 El almacén de una empresa gráfica tiene forma de ortoedro y sus dimensiones son proporcionales a los números 3, 4 y 5.

Halla las longitudes de las aristas y el volumen total sabiendo que el área total es de 752 m².

Dimensiones de los lados: $3x$, $4x$ y $5x$, ya que son proporcionales a los números 3, 4 y 5.

$$\text{Área total: } 2(3x \cdot 4x) + 2(3x \cdot 5x) + 2(4x \cdot 5x) = 752 \text{ m}^2$$

$$\text{Se opera: } 94x^2 = 752$$

$$\text{Valor de } x: x^2 = 8 \Rightarrow x = 2\sqrt{2}$$

$$\text{Dimensiones del almacén: } 6\sqrt{2} \text{ m, } 8\sqrt{2} \text{ m y } 10\sqrt{2} \text{ m}$$

$$\text{Volumen del ortoedro: } V = 6\sqrt{2} \cdot 8\sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2} = 960\sqrt{2} \text{ m}^3$$

- 8.23 En cada esquina de una plancha de hojalata de forma cuadrada se recorta un cuadrado de 5 centímetros de lado. Después, doblando los rectángulos hacia arriba y pegando las caras laterales, se forma una caja de 1280 cm³.

Halla el lado inicial de la plancha.

Sea x el lado de la plancha.

Se utiliza la fórmula del volumen de ortoedro:

$$1280 = 5(x - 10)(x - 10) \Rightarrow 256 = x^2 - 20x + 100 \Rightarrow x^2 - 20x - 156 = 0 \Rightarrow x = 26, x = -6$$

El lado de la plancha de cartón mide 26 cm.

El valor $x = -6$ no es válido, ya que el lado debe ser positivo.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

- 8.24** Un arquitecto quiere quitar la rampa y construir una nueva, de forma que, para subir, solo haya que dar tres vueltas. ¿Cuánto medirá esa rampa?

Ahora el cateto vertical medirá 8 m. La hipotenusa del triángulo será:

$$h = \sqrt{31,4^2 + 8^2} \rightarrow h = 32,4 \text{ m}$$

La rampa medirá en total $3 \cdot 32,4 = 97,2$ metros.

- 8.25** Y si hiciéramos que la rampa diera cinco vueltas completas, ¿qué longitud tendría que recorrer Luis?

Ahora el cateto vertical medirá 4,8 m. La hipotenusa del triángulo será:

$$h = \sqrt{31,4^2 + 4,8^2} \rightarrow h = 31,76 \text{ m}$$

La rampa medirá en total $5 \cdot 31,76 = 158,8$ metros.

Una vez hecho el ejercicio, se puede explicar por qué la rampa más corta no es la mejor, calculando la pendiente de cada una usando la trigonometría (tema anterior) e incluso construyendo rampas a escala.

ACTIVIDADES

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

Perímetro, área y volumen

- 8.26** Asocia en tu cuaderno cada magnitud con la unidad que le corresponde.

- | | |
|---|------------------------|
| a) Cantidad de cartón de un <i>tetra brik</i> | → I. cm ³ |
| b) Suelo cubierto con parqueté | → II. hm ³ |
| c) Espacio que ocupa una caja | → III. cm ² |
| d) Longitud del cordón de una deportiva | → IV. cm |
| e) Cantidad de agua de un pantano | → V. m ² |

- 8.27** Escribe una magnitud que se exprese en las siguientes unidades.

- a) m b) m³ c) cm² d) mm

- a) Longitud de una mesa.
b) Agua consumida en una casa durante tres meses.
c) Superficie que ocupa una hoja de papel.
d) Longitud de un tornillo.

- 8.28** Indica las unidades que corresponden a las siguientes magnitudes, y di si se trata de un perímetro, un área o un volumen.

- a) Zona ocupada por 10 CD extendidos sobre una mesa.
b) Espacio que ocupan 10 CD colocados unos sobre otros.
c) Medida del borde de un CD.

- a) Área. Se mide en m². b) Volumen. Se mide en m³. c) Perímetro. Se mide en m.

Área de figuras planas

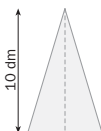
- 8.29** Calcula el perímetro de un cuadrado de 576 cm² de superficie.

$$l = \sqrt{576} = 24 \text{ cm de lado.} \quad P = 4 \cdot 24 = 96 \text{ cm}$$

- 8.30** Calcula los lados de este triángulo sabiendo que su área es de 30 dm².

$$30 = \frac{b \cdot 10}{2} \Rightarrow b = 6 \text{ dm mide la base.}$$

$$c = \sqrt{3^2 + 10^2} = 10,44 \text{ dm mide cada uno de los lados iguales.}$$



- 8.31** Halla el área del triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 13 centímetros, y uno de sus catetos, 5.

$$c = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ cm}$$

$$A = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30 \text{ cm}^2$$

- 8.32** La diagonal de un rectángulo mide 39,36 decímetros, y su base, 18. Halla su perímetro y su área.

$$\text{El otro lado del rectángulo, a: } a = \sqrt{39,36^2 - 18^2} = 35 \text{ dm}$$

$$P = 2 \cdot 18 + 2 \cdot 35 = 106 \text{ dm}$$

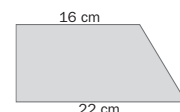
$$A = 18 \cdot 35 = 630 \text{ dm}^2$$

- 8.33** El lado de un hexágono regular mide 20 centímetros. Calcula la medida de la apotema y el área del hexágono.

$$a = \sqrt{20^2 - 10^2} = 17,32 \text{ cm}$$

$$A = \frac{20 \cdot 6 \cdot 17,32}{2} = 1039,2 \text{ cm}^2$$

- 8.34** Halla la altura del trapecio de la figura sabiendo que su área es de 190 cm².



$$190 = \frac{(22 + 16) \cdot h}{2}$$

$$h = \frac{190 \cdot 2}{38} = 10 \text{ cm}$$

- 8.35** Halla el área de la corona circular formada por dos circunferencias de 3 y 8 centímetros de radio.

¿Cuál es el área del trapecio circular de 90°?

¿Y del trapecio de 40°?

$$A = \pi \cdot (8^2 - 3^2) = 55\pi = 172,79 \text{ cm}^2 \text{ es el área de la corona circular.}$$

$$\text{Área del trapecio de } 90^\circ = \frac{A}{4} = \frac{55\pi}{4} = 43,2 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área del trapecio de } 40^\circ = \frac{55\pi}{9} = 19,2 \text{ cm}^2$$

- 8.36** Calcula la longitud de las circunferencias inscrita y circunscrita a un cuadrado de 8 centímetros de lado.

El radio de la circunferencia inscrita es la mitad del lado del cuadrado, $r = 4$ cm. $L = 2 \cdot \pi \cdot 4 = 25,12$ cm.

El radio de la circunferencia circunscrita es la mitad de la diagonal del cuadrado.

$$r = \frac{d}{2} = \frac{\sqrt{8^2 + 8^2}}{2} = 5,66 \text{ cm} \Rightarrow L = 2 \cdot \pi \cdot 5,66 = 35,54 \text{ cm}$$

- 8.37** El área de un sector circular dibujado en un círculo de 9 decímetros de diámetro es de 8,84 dm².

Calcula el número de grados que abarca.

$$8,84 = \frac{\pi \cdot 4,5^2 \cdot n}{360^\circ} \Rightarrow n = \frac{8,84 \cdot 360^\circ}{\pi \cdot 4,5^2} = 50,05^\circ$$

- 8.38** Con centro en el de una circunferencia de 106,81 centímetros de longitud, se ha trazado otra cuyo radio es 4 centímetros menor que el de aquella.

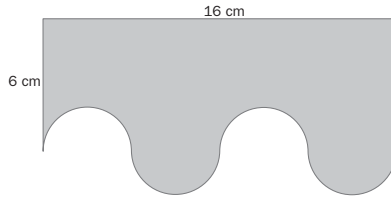
Calcula el área de la corona circular que determinan.

$$106,81 = 2 \cdot \pi \cdot R \Rightarrow R = 17 \text{ cm mide el radio de la circunferencia mayor.}$$

$$r = 13 \text{ cm mide el radio de la menor.}$$

$$A = \pi \cdot (17^2 - 13^2) = 376,8 \text{ cm}^2 \text{ es el área de la corona circular.}$$

8.39 Halla el perímetro y el área de la siguiente figura.



Dibuja un polígono que tenga la misma área.

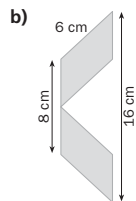
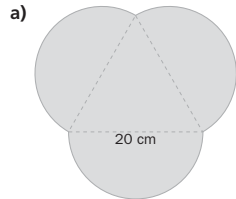
¿Tiene también el mismo perímetro?

$$P = 6 \cdot 2 + 16 + 2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 2 = 53,13 \text{ cm}^2$$

$$A = 6 \cdot 16 + \pi \cdot 2^2 - \pi \cdot 2^2 = 6 \cdot 16 = 96 \text{ cm}^2$$

El polígono de igual área es un rectángulo de lados 16 y 6 cm, y perímetro: $6 \cdot 2 + 16 \cdot 2 = 12 + 32 = 44 \text{ cm}$, que es distinto del de la figura del ejercicio.

8.40 Calcula el área y el perímetro de las siguientes figuras planas, cuyas medidas vienen dadas en centímetros.



a) Altura del triángulo: $\sqrt{20^2 - 10^2} = 17,32 \text{ cm} \Rightarrow A_{\text{triángulo}} = \frac{20 \cdot 17,32}{2} = 173,2 \text{ cm}^2$

$$A_{\text{semicírculo}} = \frac{1}{2} (\pi \cdot 10^2) = 157,08 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{total}} = 173,2 + 3 \cdot 157,08 = 644,44 \text{ cm}^2$$

$$P = 3 \cdot \pi \cdot 10 = 94,25 \text{ cm}$$

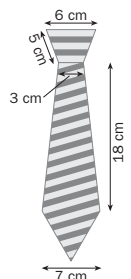
b) $P = 8 + 4 \cdot 2 + 6 \cdot 4 = 94,25 \text{ cm}$

La altura de los paralelogramos, si la base es de 4 cm, es la del triángulo isósceles de base 8 cm y lados iguales a 6 cm:

$$h = \sqrt{6^2 - 4^2} = 4,47 \text{ cm}.$$

$$A = 2 \cdot 4 \cdot 4,47 = 35,76 \text{ cm}^2$$

8.41 Calcula el perímetro y el área de la figura siguiente.



La figura está formada por 2 trapezios isósceles y un triángulo equilátero.

Trapezio superior: $h = \sqrt{5^2 - \frac{1}{2}(6 - 3)^2} = 4,77 \text{ cm} \Rightarrow A = \frac{(6 + 3) \cdot 4,77}{2} = 21,5 \text{ cm}^2$

Trapezio inferior: $A = \frac{(3 + 7) \cdot 18}{2} = 90 \text{ cm}^2$

Lados iguales: $l = \sqrt{18^2 + \frac{1}{2}(7 - 3)^2} = 18,11 \text{ cm}$

Triángulo equilátero: $h = \sqrt{7^2 - 3,5^2} = 6,06 \Rightarrow A = \frac{7 \cdot 6,06}{2} = 21,21 \text{ cm}^2$

Área de la figura: $A = 21,5 + 90 + 21,21 = 132,71 \text{ cm}^2$

$$P = 7 \cdot 2 + 18,11 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 6 = 66,22 \text{ cm}$$

Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos

8.42 Halla el área total y el volumen de las siguientes figuras.

- Un cilindro de 19 centímetros de diámetro y 10 de altura.
- Un ortoedro de 20 decímetros de largo, 8 de ancho y 9 de alto.
- Una esfera de 32 centímetros de diámetro.

a) $A = 2 \cdot \pi \cdot 9,5^2 + 2 \cdot \pi \cdot 9,5 \cdot 10 = 1163,96 \text{ cm}^2$

$$V = \pi \cdot 9,5^2 \cdot 10 = 2835,29 \text{ cm}^3$$

b) $A = 2 \cdot 20 \cdot 8 + 2 \cdot 20 \cdot 9 + 2 \cdot 8 \cdot 9 = 824 \text{ cm}^2$

$$V = 20 \cdot 8 \cdot 9 = 1440 \text{ cm}^3$$

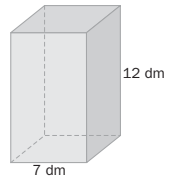
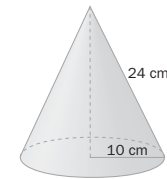
c) $A = 4 \cdot \pi \cdot 16^2 = 3217 \text{ cm}^2$

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 16^3 = 17\,157,28 \text{ cm}^3$$

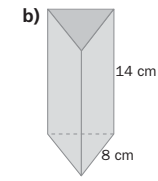
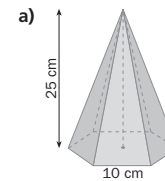
8.43 Halla el área lateral de estos cuerpos geométricos.

a) $A_l = 2 \cdot \pi \cdot 10 \cdot 24 = 1507,97 \text{ cm}^2$

b) $A_l = 4 \cdot 7 \cdot 12 = 336 \text{ cm}^2$



8.44 Calcula el volumen de las siguientes figuras geométricas.



a) Apotema de la base: $a = \sqrt{10^2 - 5^2} = 8,66 \text{ cm} \Rightarrow V = \frac{6 \cdot 10 \cdot 8,66}{2 \cdot 3} \cdot 25 = 2165 \text{ cm}^3$

b) Altura del triángulo de la base: $h = \sqrt{8^2 - 4^2} = 6,93 \text{ cm} \Rightarrow V = \frac{8 \cdot 6,93}{2} \cdot 14 = 388,08 \text{ cm}^3$

8.45 El área de un cubo es de 864 cm². Calcula su volumen.

$$864 = 6 \cdot l^2 \Rightarrow l = \sqrt{\frac{864}{4}} = 12 \text{ cm mide el lado del cubo.}$$

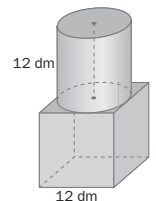
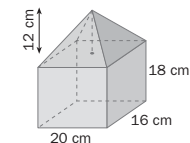
$$V = 12^3 = 1728 \text{ cm}^3$$

8.46 Calcula el volumen de los siguientes objetos.

a) $V = 20 \cdot 16 \cdot 18 + \frac{1}{3} \cdot 20 \cdot 16 \cdot 12$

$$V = 7040 \text{ cm}^3$$

b) $V = 12^3 + \pi \cdot 6^2 \cdot 12 = 3085,17 \text{ dm}^3$



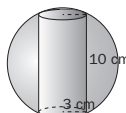
8.47 Halla el área total de las figuras del ejercicio anterior.

- a) Altura de las caras laterales de la pirámide cuyas bases son 20 cm: $h = \sqrt{12^2 - 10^2} = 15,62$ cm
 Altura de las caras laterales de la pirámide cuyas bases son 16 cm: $h = \sqrt{12^2 + 8^2} = 14,42$ cm
 $A = 20 \cdot 16 + 2 \cdot 16 \cdot 18 + 2 \cdot \frac{20 \cdot 15,62}{2} + 2 \cdot \frac{16 \cdot 14,42}{2} + 2 \cdot 20 \cdot 18 = 2159,12$ cm²
- b) Área del cubo sin la cara superior: $A = 5 \cdot 12^2 = 720$ dm²
 Área lateral del cilindro y de la base superior: $A' = 2 \cdot \pi \cdot 6 \cdot 12 + \pi \cdot 6^2 = 565,49$ dm²
 Área de la cara superior del cubo quitando la base del cilindro: $A'' = 12^2 - \pi \cdot 6^2 = 30,90$ dm²
 Área total de la figura: $A = 720 + 565,49 + 30,90 = 1316,39$ dm²

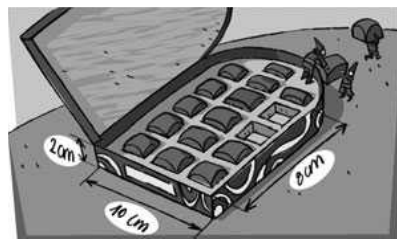
8.48 Calcula el volumen comprendido entre una esfera de 8 centímetros de radio y un cilindro dentro de ella de 3 centímetros de diámetro y 10 de altura.

Haz un dibujo de la composición.

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 8^3 - \pi \cdot 1,5^2 \cdot 10 = 2073,97 \text{ cm}^3$$



8.49 Calcula el área y el volumen de la caja de la figura, suponiéndola cerrada.



$$A = 2 \cdot 8 \cdot 10 + 2 \cdot 8 \cdot 2 + 2 \cdot 10 + \pi \cdot 5^2 + \pi \cdot 5 \cdot 2$$

$$A = 321,95 \text{ cm}^2$$

$$V = 8 \cdot 10 \cdot 2 + \frac{\pi \cdot 5^2}{2} \cdot 2 = 238,54 \text{ cm}^3$$

CUESTIONES PARA ACLARARSE

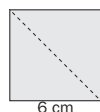
8.50 Señala en tu cuaderno si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.

- a) El volumen de un cuadrado se obtiene elevando al cubo la medida de su lado.
 b) La medida de la superficie habitable de un apartamento es de 50 metros.
 c) El volumen de un cuerpo geométrico se puede relacionar con su capacidad.
 d) El perímetro de un triángulo es el triple de su lado.
- a) Falsa. El cuadrado no tiene volumen.
 b) Falsa. La superficie se mide en unidades cuadradas.
 c) Verdadera. $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ l}$.
 d) Falsa. Es la suma de sus lados y solo es igual al triple cuando el triángulo es equilátero.

8.51 Con dos triángulos rectángulos isósceles cuyos catetos miden 6 centímetros se pueden formar dos figuras de igual área: un cuadrado de 6 centímetros de lado, y un triángulo isósceles de 12 centímetros de base y 6 de altura.

Dibuja las dos figuras y demuestra que tienen la misma área.

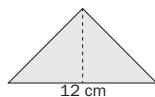
¿Tienen también el mismo perímetro?



$$\text{Área del cuadrado: } 6^2 = 36 \text{ cm}^2$$

$$\text{Perímetro: } 4 \cdot 6 = 24 \text{ cm}$$

No tienen el mismo perímetro.



$$\text{Área del triángulo: } \frac{12 \cdot 6}{2} = 36 \text{ cm}^2$$

$$\text{Lados iguales: } \sqrt{6^2 + 6^2} = 8,49 \text{ cm}$$

$$\text{Perímetro: } 12 + 2 \cdot 8,49 = 28,98 \text{ cm}$$

8.52 Considera un prisma y una pirámide que tienen la misma base y altura.

¿Cuántas pirámides se necesitan para obtener el mismo volumen del prisma?

Se necesitan 3 pirámides.

8.53 Si se divide un cuadrado en dos rectángulos al unir los puntos medios de dos lados opuestos, y en dos triángulos, al trazar una diagonal, ¿el área del rectángulo y el triángulo formados es la misma?

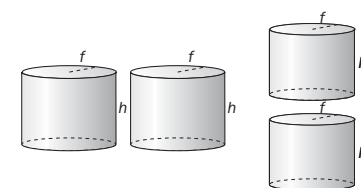
Sí, ya que en los dos casos el área es $\frac{a^2}{2}$.

8.54 ¿De qué manera habrá que unir dos cilindros iguales para que su área sea exactamente el doble que la de uno de ellos? Dibújalo.

¿Cómo habrá que colocarlos para que no se cumpla lo anterior, aun estando unidos?

En el primer caso se deben colocar unidos por la generatriz.

En el segundo, unidos por una de sus bases.



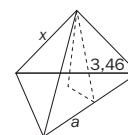
8.55 ¿Qué relación tienen el área de un tetraedro y la de un cubo con la misma arista? Ayúdate de un ejemplo para responder a la pregunta.

Si tienen de arista 4 cm, por ejemplo, $V_{\text{cubo}} = 4^3 = 64 \text{ cm}^3$.

Para hallar el área de la base del tetraedro hay que calcular primero la altura de un triángulo equilátero de 4 cm de lado:

$$h = \sqrt{4^2 - 2^2} = 3,46 \text{ cm}$$

$$\text{Área del triángulo de la base: } \frac{4 \cdot 3,46}{2} = 6,92 \text{ cm}^2$$



Para calcular la altura del tetraedro, en el triángulo rectángulo del dibujo, a es la tercera parte de la altura del triángulo de la base porque en un triángulo equilátero la altura coincide con la mediana:

$$a = 3,46 : 3 = 1,15 \text{ cm}$$

$$\text{Por tanto, } x = \sqrt{3,46^2 + 1,15^2} = 3,26 \text{ cm}$$

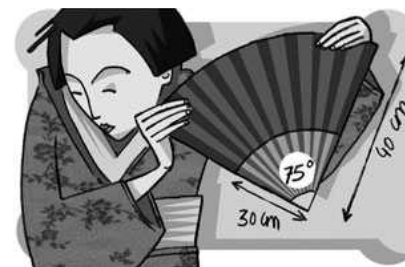
$$V_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{3} \cdot 6,92 \cdot 3,26 = 7,53 \text{ cm}^3$$

$$64 : 7,53 = 8,5$$

El volumen del cubo es 8,5 veces el del tetraedro.

PROBLEMAS PARA APLICAR

8.56 En el abanico del dibujo, calcula el área de la zona coloreada.



$$A = \frac{\pi \cdot (40^2 - 30^2) \cdot 75^\circ}{360^\circ} = 458,15 \text{ cm}^2$$

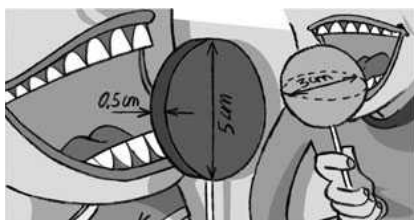
- 8.57 En la fiesta de cumpleaños de Nerea se han preparado unos sándwiches con unas rebanadas de pan con forma de prisma cuadrangular de 10 centímetros de lado de la base y 15 milímetros de altura. Contesta a las siguientes preguntas.

- a) En el centro de la rebanada superior de cada sándwich se ha recortado un trozo circular de 2 centímetros de radio para decorarlo. ¿Qué cantidad de pan queda en la rebanada superior?
- b) Nerea quiere tirar el pan del círculo recortado, y su madre, no, porque dice que con él se podría alimentar a muchas personas.

Si se han preparado 50 sándwiches, ¿cuánto pan se perdería con todos los recortes? ¿Cuántas rebanadas como las utilizadas se podrían hacer con él?

- a) $V_{\text{rebanada}} = 10^2 \cdot 1,5 = 150 \text{ cm}^3$
 $V_{\text{recorte}} = \pi \cdot 2^2 \cdot 1,5 = 18,85 \text{ cm}^3$
 $V_{\text{queda}} = 150 - 18,85 = 131,15 \text{ cm}^3$
- b) $50 \cdot 18,85 \text{ cm}^3 = 942,5 \text{ cm}^3$
 Se podrían hacer 6,28 rebanadas de pan.

- 8.58 En una fábrica de dulces se han preparado 600 decímetros cúbicos de caramelo de fresa para hacer piruletas y caramelos como los de la figura.



- a) Si solo se hacen piruletas, ¿cuántas se pueden preparar?
- b) ¿Y cuántos caramelos, si solo se elaboran de este tipo?
- c) Si cada piruleta se vende a 0,75 euros y cada caramelo a 0,90, estudia la opción más rentable: hacer solo piruletas, solo caramelos o la mitad de cada uno de ellos.

- a) $V = \pi \cdot 2,5^2 \cdot 0,5 = 9,82 \text{ cm}^3 = 0,00982 \text{ dm}^3 \Rightarrow 600 : 0,00982 = 61099,8 \text{ piruletas} \approx 61100 \text{ piruletas}$
- b) $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1,5^3 = 14,14 \text{ cm}^3 = 0,01414 \text{ dm}^3 \Rightarrow 600 : 0,01414 = 42432,8 \text{ caramelos} \approx 42433 \text{ caramelos}$
- c) Solo piruletas: $61100 \cdot 0,75 = 45825 \text{ €}$
 Solo caramelos: $42433 \cdot 0,90 = 38189,70 \text{ €}$
 Mitad de piruletas y mitad de caramelos: $(61100 : 2) \cdot 0,75 + (42433 : 2) \cdot 0,90 = 42007,35 \text{ €}$
 Lo más rentable es hacer solo piruletas.

- 8.59 En unos recipientes cilíndricos de 6 metros de diámetro y 6 de altura se ha preparado cera para elaborar velas. Unas tienen forma de prisma cuadrangular de 7 centímetros de lado de la base y 10 de altura, y otras, forma cilíndrica de 9 centímetros de diámetro de la base y 10 de altura.

Para hacer un pedido de 2000 velas con forma de prisma y 300 con forma de cilindro, ¿es suficiente con uno de los recipientes de cera?

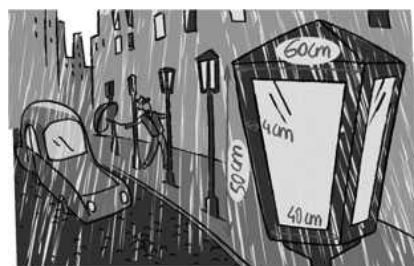
$$V_{\text{recipiente}} = \pi \cdot 3^2 \cdot 6 = 169,65 \text{ m}^3 \text{ de cera se hace en el recipiente.}$$

$$V_{\text{prisma}} = 7^2 \cdot 10 = 490 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot 4,5^2 \cdot 10 = 636,17 \text{ cm}^3$$

En total se gastan: $2000 \cdot 490 + 300 \cdot 636,17 = 1170851 \text{ cm}^3 = 1,17 \text{ m}^3$ se utilizan en las velas. Por tanto, hay suficiente.

- 8.60 En una ciudad se han colocado 60 farolas formadas por cuatro trapecios isósceles de cristal de 20 milímetros de grosor, adornado con un borde de forja, como los de la figura.



- a) ¿Cuánto cristal ha sido necesario en la construcción de todas las farolas?
- b) Suponiendo que el adorno de hierro tiene un grosor tan fino que se puede considerar una figura plana, ¿qué cantidad de este metal se ha empleado en total?

$$a) V = 4 \cdot \frac{(60 + 40) \cdot 50}{2} \cdot 2 = 20000 \text{ cm}^3 \text{ de cristal se han}$$

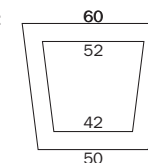
empleado en la construcción de cada farola.

$60 \cdot 20000 = 1200000 \text{ cm}^3$ de cristal se han utilizado entre todas ellas.

- b) La cantidad de hierro es el área comprendida entre los dos trapecios de la figura:

$$A = A_{\text{trapezio mayor}} - A_{\text{trapezio menor}} = \frac{(60 + 40) \cdot 50}{2} - \frac{(52 + 32) \cdot 42}{2} =$$

$$= 2500 - 1764 = 736 \text{ cm}^2 \text{ de hierro se han utilizado.}$$



- 8.61 Paula ha comprado 5 kilogramos de tierra para plantas. Va a utilizar 3 macetas con forma de ortoedro de 45 centímetros de largo, 20 de ancho y 15 de alto, y otras 4 macetas con forma troncocónica de 25 centímetros de diámetro superior, 18 de diámetro de la base y 23 de altura.

Sabiendo que la densidad de la tierra es de 300 kilogramos por metro cúbico, ¿tendrá suficiente tierra para llenar todas las macetas?

$$V_{\text{ortoedro}} = 45 \cdot 20 \cdot 15 = 13500 \text{ cm}^3 \Rightarrow 3 \cdot 13500 = 40500 \text{ cm}^3 \text{ de tierra se utiliza en las macetas con forma de ortoedro.}$$

Para hallar el volumen de las macetas troncocónicas, hallamos primero la altura del cono si estuviera completo.

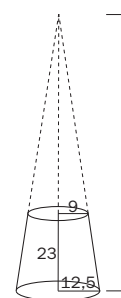
$$\text{Por Tales: } \frac{9}{h - 23} = \frac{12,5}{h} \Rightarrow 9h = 12,5h - 287,5 \Rightarrow h = \frac{287,5}{3,5} = 82,14 \text{ cm}$$

$$V_{\text{truncocónicas}} = \frac{1}{3} (\pi \cdot 12,5^2 \cdot 82,14 - \pi \cdot 9^2 \cdot 59,14) = 8423,69 \text{ cm}^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot 8423,69 = 33694,77 \text{ cm}^3$$

En total se han utilizado: $40500 + 33694,77 = 74194,77 \text{ cm}^3 = 0,0742 \cdot 300 \text{ m}^3 = 22,26 \text{ kg.}$

Por tanto, no tiene suficiente tierra.



REFUERZO

Áreas de figuras planas

- 8.62 Calcula el perímetro y el área de estas figuras.

- a) Un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 38 centímetros, y uno de sus catetos, 16.
- b) Un cuadrado cuya diagonal mide 50 centímetros.
- c) Un rombo de diagonales 16 y 12 centímetros.

$$a) \text{ El otro cateto: } b = \sqrt{38^2 - 16^2} = 34,47 \text{ cm}$$

$$P = 38 + 16 + 34,47 = 88,47 \text{ cm}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 34,47 = 275,76 \text{ cm}^2$$

$$b) l = \sqrt{\frac{50^2}{2}} = 35,36 \text{ cm mide el lado.}$$

$$P = 4 \cdot 35,36 = 141,44 \text{ cm}$$

$$A = 35,36^2 = 1250,33 \text{ cm}^2$$

$$c) l = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \text{ cm}$$

$$P = 4 \cdot 10 = 40 \text{ cm}$$

$$A = \frac{16 \cdot 12}{2} = 96 \text{ cm}^2$$

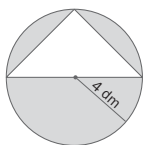
- 8.63 Calcula el área de las siguientes figuras.

- a) Un sector circular de 8 centímetros de radio y un ángulo de 36°.
- b) La corona circular comprendida entre dos circunferencias de 19 y 34 centímetros de diámetro cada una de ellas.

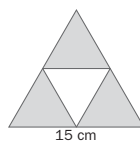
$$a) A = \frac{\pi \cdot 8^2 \cdot 36^\circ}{360^\circ} = 20,11 \text{ cm}^2$$

$$b) A = \pi \cdot (17^2 - 9,5^2) = 624,39 \text{ cm}^2$$

- 8.64 Calcula el área de la parte coloreada de las figuras compuestas presentadas a continuación.



$$a) A = \pi \cdot 4^2 - \frac{8 \cdot 4}{2} = 34,27 \text{ cm}^2$$

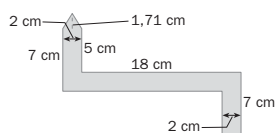


- b) Son 3 triángulos equiláteros de 7,5 cm de lado.

$$\text{La altura: } h = \sqrt{7,5^2 - 3,75^2} = 6,5 \text{ cm}$$

$$A = 3 \cdot \frac{7,5 \cdot 6,5}{2} = 73,13 \text{ cm}^2$$

- 8.65 Calcula el perímetro y el área de esta figura.



Para hallar el perímetro es necesario calcular la medida de los lados iguales del triángulo:

$$l = \sqrt{1,71^2 + 1^2} \quad l = 1,98 \text{ cm}$$

$$P = 2 + 7 + (20 - 2) + 5 + 2 \cdot 1,98 + 7 + (20 - 2) + (7 - 2)$$

$$P = 65,96 \text{ cm}$$

$$A = 2 \cdot 7 + (20 - 2) \cdot 2 + 5 \cdot 2 + \frac{2 \cdot 1,71}{2} = 61,71 \text{ cm}^2$$

Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos

- 8.66 Calcula el área total y el volumen de las figuras indicadas a continuación.

- a) Un prisma pentagonal regular de 30 centímetros de perímetro en su base, 11 de altura y 4,13 de apotema.

- b) Un cono de 17 decímetros de diámetro en su base y 25 de altura.

- a) El lado de la base es $30 : 5 = 6 \text{ cm}$.

$$A = 2 \cdot \frac{30 \cdot 4,13}{2} + 5 \cdot 6 \cdot 11 = 453,9$$

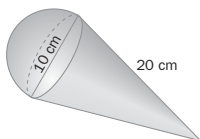
$$V = \frac{30 \cdot 4,13}{2} \cdot 11 = 681,45 \text{ cm}^3$$

- b) La generatriz del cono: $g = \sqrt{25^2 + 8,5^2} = 26,41 \text{ cm}$

$$A = \pi \cdot 8,5^2 + 2\pi \cdot 8,5 \cdot 26,41 = 1637,46 \text{ dm}^2$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot 8,5^2 \cdot 25 = 1891,5 \text{ dm}^3$$

- 8.67 Halla el volumen de la figura geométrica representada a la izquierda.



$$\text{La altura del cono: } h = \sqrt{20^2 - 5^2} = 19,36 \text{ cm}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot 5^2 \cdot 19,36 + \frac{1}{6} (4 \cdot \pi \cdot 5^3) = 768,64 \text{ cm}^3$$

- 8.68 ¿Qué cantidad de chapa se necesita para hacer una esfera hueca de 5 metros de diámetro?

¿Cuánta agua cabe en su interior?

$$4 \cdot \pi \cdot 2,5^2 = 25 \cdot \pi = 78,54 \text{ m}^2$$

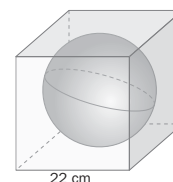
$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2,5^3 = 65,45 \text{ m}^3$$

- 8.69 Halla la altura y el área total de un cilindro de $461,81 \text{ cm}^3$ de volumen si el radio de la base mide 35 milímetros.

$$461,81 = \pi \cdot 3,5^2 \cdot h \Rightarrow h = 12 \text{ cm}$$

$$S_t = 2 \cdot \pi \cdot 3,5^2 + 2 \cdot \pi \cdot 3,5 \cdot 12 = 340,9 \text{ cm}^2$$

- 8.70 En el interior de este cubo se ha colocado una esfera tangente a sus caras. Calcula el volumen que queda entre ambas figuras.



$$V = 22^3 - \frac{4}{3} \pi \cdot 11^3 = 5072,72 \text{ cm}^3$$

AMPLIACIÓN

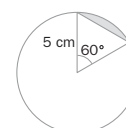
- 8.71 El volumen de un cilindro es de $24033,18 \text{ dm}^3$ y su altura mide 340 centímetros.

¿Cuál es su radio?

$$24033,18 = \pi \cdot r^2 \cdot 34$$

$$r = \sqrt{\frac{24033,18}{34\pi}} = 15 \text{ dm}$$

- 8.72 Calcula el área de la parte coloreada de la figura representada.



$$A_{\text{segmento circular}} = A_{\text{sector circular}} - A_{\text{triángulo}}$$

$$A_{\text{sector circular}} = \frac{\pi \cdot 5^2 \cdot 60^\circ}{360^\circ} = 13,09 \text{ cm}^2$$

Para hallar el área del triángulo, hay que calcular su base y su altura. En principio es isósceles, puesto que dos de sus lados son iguales al radio de la circunferencia y, por tanto, los ángulos que forman estos

con el segmento que delimita la zona a calcular son iguales: $\frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$ mide cada uno de ellos.

Se trata, entonces, de un triángulo equilátero y el lado desconocido mide también 5 cm.

$$h = \sqrt{5^2 - 2,5^2} = 4,33 \text{ cm} \Rightarrow A_{\text{triángulo}} = \frac{5 \cdot 4,33}{2} = 10,83 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{segmento circular}} = 13,09 - 10,83 = 2,26 \text{ cm}^2$$

- 8.73 En el interior de una esfera de 13 decímetros de diámetro hay una pirámide triangular de 8 decímetros de lado y 6 de altura. ¿Qué volumen queda entre los dos cuerpos geométricos?

$$V = V_{\text{esfera}} - V_{\text{pirámide}}$$

$$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \pi \cdot 6,5^3 = 1150,35 \text{ dm}^3$$

Para hallar el área de la base de la pirámide hay que calcular primero la altura de un triángulo equilátero de 8 dm de lado:

$$h = \sqrt{8^2 - 4^2} = 6,93 \text{ dm}$$

$$\text{Área del triángulo de la base: } \frac{8 \cdot 6,93}{2} = 27,72 \text{ dm}^2$$

$$V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} \cdot 27,72 \cdot 6 = 55,44 \text{ dm}^3$$

$V = 1150,35 - 55,44 = 1094,91 \text{ dm}^3$ es el volumen entre los dos cuerpos.

- 8.74 La diagonal de un cubo es de $7\sqrt{3}$ centímetros. Calcula su área y su volumen. ¿Cuál es el radio de una esfera circunscrita al cubo?

Si l es el lado del cuadrado, la diagonal de una cara es: $d = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2l^2} = l\sqrt{2}$

La diagonal del cubo: $D = \sqrt{(\sqrt{2}l)^2 + l^2} = \sqrt{2l^2 + l^2} = \sqrt{3}l \Rightarrow 7\sqrt{3} = \sqrt{3}l \Rightarrow l = 7$ cm

$$A = 6 \cdot 7^2 = 294 \text{ cm}^2$$

$$V = 7^3 = 343 \text{ cm}^3$$

$$R = \frac{7\sqrt{3}}{2}$$

- 8.75 Estudia cómo varía el volumen de un cilindro de radio r y altura h en cada uno de los siguientes casos.

- Su altura aumenta el doble.
- Su radio disminuye a la mitad.
- Su altura aumenta el doble y su radio también.

El volumen del cilindro es: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$.

$$a) V = \pi \cdot r^2 \cdot 2h = 2 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = 2V$$

El volumen también aumenta el doble.

$$b) V = \pi \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^2 \cdot h = \frac{1}{4} \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{4} \cdot V$$

El volumen disminuye a la cuarta parte.

$$c) V = \pi \cdot (2r)^2 \cdot 2h = 8 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = 8 \cdot V$$

El volumen se multiplica por 8.

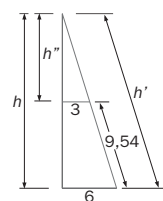
- 8.76 Halla el área total y el volumen del tronco de pirámide representado a la derecha.

Para hallar el área de una cara lateral es necesario calcular su altura:

$$h = \sqrt{10^2 - \left(\frac{12-6}{2}\right)^2} = 9,54 \text{ cm}$$

$$A_{\text{lateral}} = 4 \cdot \frac{(12+6) \cdot 9,54}{2} = 343,44 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{total}} = 12^2 + 6^2 + 343,44 = 523,44 \text{ cm}^2$$



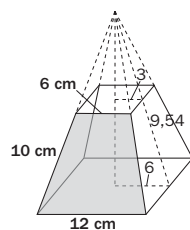
Para obtener el volumen, hay que conocer la altura de la pirámide de la que se obtuvo este tronco:

$$\frac{h'}{6} = \frac{h' - 9,54}{3} \Rightarrow h' = 19,08 \text{ cm}$$

$$h'^2 = h^2 + 6^2 \Rightarrow h = 18,11 \text{ cm}$$

$$\frac{h}{6} = \frac{h''}{3} \Rightarrow h'' = 9,05 \text{ cm}$$

$$V = \frac{1}{3} 12^2 \cdot S_b \cdot h - \frac{1}{3} \cdot S_b \cdot h'' = \frac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot 18 \cdot 11 - \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 9,05 = 869,28 - 108,6 = 760 \text{ cm}^3$$



- 8.77 Unos módulos para guardar ropa debajo de la cama tienen la base con forma de sector circular de 60 centímetros de radio y ángulo de 80° . La altura de los mismos es de 20 centímetros.

¿Qué capacidad tienen?

Si la base fuera un círculo completo, la figura sería un cilindro, de modo que es una parte de él.

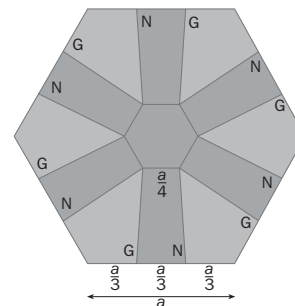
$$A_{\text{sector}} = \frac{\pi \cdot 60^2 \cdot 80^\circ}{360^\circ} = 2513,27 \text{ cm}^2$$

$$V = 2513,17 \cdot 20 = 50\,263,40 \text{ cm}^3$$

PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

Logotipo

- 8.78 A continuación se muestra el logotipo de una marca de coches. Su contorno exterior es un hexágono regular, y en el interior incluye otro hexágono, también regular. En el diseño hay únicamente zonas de color gris y zonas de color naranja, tal y como muestra la figura.



- Calcula en qué proporción está el área de color gris respecto del área de color naranja.
- Halla dichas áreas si el lado del hexágono interior es de un centímetro.

$$\text{Apotema del hexágono exterior: } \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$\text{Apotema del hexágono interior: } \frac{\sqrt{3}}{8}a$$

$$\text{Altura de los trapecios isósceles: } \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right)a = \frac{3\sqrt{3}}{8}a$$

$$\text{Área de un trapecio: } \frac{\left(\frac{a}{3} + \frac{a}{4}\right) \frac{3\sqrt{3}}{8}a}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{64}a^2$$

$$\text{Área naranja: } 6 \cdot \frac{7\sqrt{3}}{64}a^2 + \frac{3}{2}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{8}a = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2 \quad \text{Área gris: } \frac{6a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 - \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$$

$$a) \frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2}{\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2} = 1$$

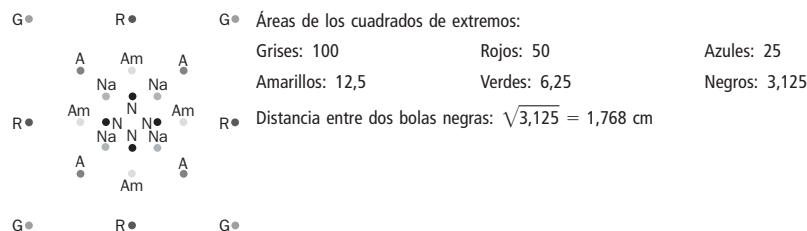
$$b) \frac{3\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$$

Bolas de colores

- 8.79 En la siguiente disposición se verifica que:

- En cualquier caso, las cuatro bolas de un mismo color son los vértices de un cuadrado.
- Cualquier bola roja es el punto medio de un segmento cuyos extremos son dos bolas grises.
- Cualquier bola azul es el punto medio de un segmento cuyos extremos son dos bolas rojas.
- Cualquier bola amarilla es el punto medio de un segmento cuyos extremos son dos bolas azules.
- Cualquier bola naranja es el punto medio de un segmento cuyos extremos son dos bolas amarillas.
- Cualquier bola de color negro es el punto medio de un segmento cuyos extremos son dos bolas naranjas.

Si la distancia entre dos bolas grises es de 10 centímetros, calcula las áreas de los cuadrados determinados por las bolas del mismo color y halla la distancia entre dos bolas negras consecutivas.



AUTOEVALUACIÓN

8.A1 Calcula el perímetro y el área de:

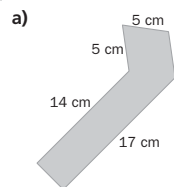
- a) Un cuadrado de 18 centímetros de diagonal.
b) Un octógono regular de 7 centímetros de lado y 8,45 de apotema.

a) $18^2 = 2 \cdot l^2 \Rightarrow l = 12,73$ cm; por tanto, $P = 50,91$ cm y $A = 162$ cm²

b) $P = 8 \cdot 7 = 56$ cm

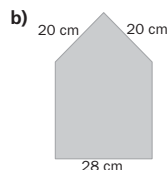
$$A = \frac{p \cdot a}{2} = \frac{56 \cdot 8,45}{2} = 236,6 \text{ cm}^2$$

8.A2 Halla el área de las figuras siguientes.



a) $h_{\text{trapecio}} = \sqrt{5^2 - (17 - 14)^2} = 4$ cm

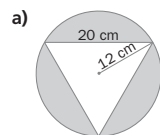
$$A = 5^2 + \frac{(17 + 14) \cdot 4}{2} = 87 \text{ cm}^2$$



b) $h_{\text{triángulo}} = \sqrt{20^2 - 14^2} = 14,28$ cm

$$A = 28^2 + \frac{28 \cdot 14,28}{2} = 983,92 \text{ cm}^2$$

8.A3 Calcula el área de la zona coloreada.



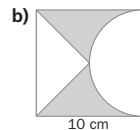
a) $A = A_{\text{círculo}} - A_{\text{triángulo}}$

$$A_{\text{círculo}} = \pi \cdot 12^2 = 452,39 \text{ cm}^2$$

La altura del triángulo: $h = \sqrt{20^2 - 10^2} = 17,32$ cm

$$A_{\text{triángulo}} = \frac{20 \cdot 17,32}{2} = 173,2 \text{ cm}^2$$

$$A = 452,39 - 173,2 = 279,18 \text{ cm}^2$$



b) $A = A_{\text{cuadrado}} - A_{\text{semicírculo}} - A_{\text{triángulo}}$

$$A_{\text{cuadrado}} = 10^2 = 100 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{semicírculo}} = \frac{1}{2} \pi \cdot 5^2 = 39,27 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{triángulo}} = \frac{10 \cdot 5}{2} = 25 \text{ cm}^2$$

$$A = 100 - 39,27 - 25 = 35,73 \text{ cm}^2$$

8.A4 Calcula el área total de las siguientes figuras.

- a) Un prisma pentagonal de 6 centímetros de lado, 4,13 de apotema y 18 de altura.
b) Un cono de 24 centímetros de generatriz y 6 de radio de base.
c) Una pirámide con 2 caras verticales de 15 cm de altura cuya base es un triángulo rectángulo isósceles de 8 cm de hipotenusa.

a) $A = 2 \cdot A_b + A_{\text{lateral}} = 2 \cdot \frac{P \cdot a}{2} + P \cdot h = 2 \cdot \frac{5 \cdot 6 \cdot 4,13}{2} + 5 \cdot 6 \cdot 18 = 663,9$ cm²

b) $A = \pi \cdot 6^2 + 2 \cdot \pi \cdot 6 \cdot 24 = 1017,88$ cm²

c) Los catetos de la base miden: $c = \sqrt{\frac{8^2}{2}} = 5,66$ cm².

Para calcular la altura del triángulo lateral cuya base es la hipotenusa del triángulo de la base, consideramos el triángulo rectángulo de catetos la altura de la pirámide, 15 cm, y la mediana (que coincide con la altura sobre la hipotenusa) del triángulo de la base.

Altura sobre la hipotenusa: $a = \sqrt{5,66^2 - 4^2} = 4$ cm

Altura del triángulo lateral: $b = \sqrt{4^2 + 15^2} = 15,52$ cm

$$A = \frac{5,66^2}{2} + 2 \cdot \frac{5,66 \cdot 15}{2} + \frac{8 \cdot 15,52}{2} = 163 \text{ cm}^2$$

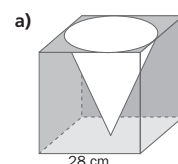
8.A5 Halla la altura de un cilindro de 5852,79 dm³ de volumen y 23 decímetros de diámetro.

$$5852,79 = \pi \cdot 11,5^2 \cdot h \Rightarrow h = \frac{5852,79}{11,5^2 \pi} = 14,09 \text{ dm}$$

8.A6 Calcula el radio de una esfera de 0,18 m³ de volumen.

$$0,18 = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{0,18 \cdot 3}{4\pi}} = 0,35 \text{ m}$$

8.A7 Halla el volumen de la zona sombreada:

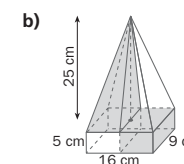


$$V = V_{\text{cubo}} - V_{\text{cono}}$$

$$V_{\text{cubo}} = 28^3 = 21952 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{cono}} = \frac{1}{3} (\pi \cdot 14^2 \cdot 28) = 5747,02 \text{ cm}^3$$

$$V = 21952 - 5747,02 = 16204,98 \text{ cm}^3$$



$$V = V_{\text{ortoedro}} + V_{\text{pirámide}}$$

$$V_{\text{ortoedro}} = 16 \cdot 9 \cdot 5$$

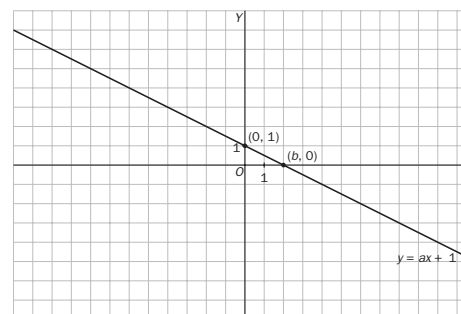
$$V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 9 \cdot 25$$

$$V = 1920 \text{ cm}^3$$

MATETIEMPOS

El área mínima de un triángulo

Todas las rectas de ecuación $y = ax + 1$ forman triángulos con los ejes de coordenadas para diferentes valores de a ($a \neq 0$). Calcula el valor de a para que el triángulo sea isósceles. ¿Qué valor debe tener para que el área del triángulo sea mínima?



El valor de a podrá ser positivo si la recta es creciente o negativo si es decreciente, y siempre la recta pasará por el punto $(0, 1)$. Analicemos la recta decreciente (la recta creciente será simétrica al eje $x = 0$ y tendrá los mismos resultados). El área será:

$$A = \frac{b \times 1}{2} = \frac{b}{2}$$

El área del triángulo será mínima cuando b se acerque a cero, luego el área tenderá a cero.

El triángulo será isósceles cuando $b = 1$ y la recta pase por el punto $(1, 0)$. Entonces, $a = -1$.

También será isósceles si $b = -1$ y la recta pasa por el punto $(-1, 0)$. Entonces, $a = 1$.