

6

NÚMEROS COMPLEJOS

Página 147

REFLEXIONA Y RESUELVE

Extraer fuera de la raíz

■ Saca fuera de la raíz:

a) $\sqrt{-16}$

b) $\sqrt{-100}$

a) $\sqrt{-16} = \sqrt{-1 \cdot 16} = 4\sqrt{-1}$

b) $\sqrt{-100} = 10\sqrt{-1}$

Potencias de $\sqrt{-1}$

■ Calcula las sucesivas potencias de $\sqrt{-1}$:

a) $(\sqrt{-1})^3 = (\sqrt{-1})^2(\sqrt{-1}) = \dots$

b) $(\sqrt{-1})^4$

c) $(\sqrt{-1})^5$

a) $(\sqrt{-1})^3 = (\sqrt{-1})^2(\sqrt{-1}) = (-1) \cdot \sqrt{-1} = -\sqrt{-1}$

b) $(\sqrt{-1})^4 = (\sqrt{-1})^2(\sqrt{-1})^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$

c) $(\sqrt{-1})^5 = (\sqrt{-1})^4 \cdot \sqrt{-1} = 1 \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{-1}$

¿Cómo se maneja $k \cdot \sqrt{-1}$?

■ Simplifica.

a) $-2\sqrt{-1} + 11\sqrt{-1} - 8\sqrt{-1} - \sqrt{-1}$

b) $5\sqrt{-1} + 2\sqrt{-1} - 10\sqrt{-1} + 3\sqrt{-1}$

c) $8\sqrt{-1} + \frac{2}{5}\sqrt{-1} - \frac{3}{10}\sqrt{-1} - \frac{1}{2}\sqrt{-1}$

a) $-2\sqrt{-1} + 11\sqrt{-1} - 8\sqrt{-1} - \sqrt{-1} = 0 \cdot \sqrt{-1} = 0$

b) $5\sqrt{-1} + 2\sqrt{-1} - 10\sqrt{-1} + 3\sqrt{-1} = 0$

c) $8\sqrt{-1} + \frac{2}{5}\sqrt{-1} - \frac{3}{10}\sqrt{-1} - \frac{1}{2}\sqrt{-1} = \left(\frac{80}{10} + \frac{4}{10} - \frac{3}{10} - \frac{5}{10}\right)\sqrt{-1} = \frac{38}{5}\sqrt{-1}$

Expresiones del tipo $a + b \cdot \sqrt{-1}$

■ Simplifica las siguientes sumas:

a) $(-3 + 5\sqrt{-1}) + (2 - 4\sqrt{-1}) - (6\sqrt{-1})$

b) $(-5)(5 + \sqrt{-1}) - 2(1 - 6\sqrt{-1})$

a) $(-3 + 5\sqrt{-1}) + (2 - 4\sqrt{-1}) - (6\sqrt{-1}) = -1 - 5\sqrt{-1}$

b) $(-5)(5 + \sqrt{-1}) - 2(1 - 6\sqrt{-1}) = -3 - \sqrt{-1}$

■ Efectúa las siguientes operaciones combinadas:

a) $3(2 - 4\sqrt{-1}) - 6(4 + 7\sqrt{-1})$

b) $8(5 - 3\sqrt{-1}) + 4(-3 + 2\sqrt{-1})$

a) $3(2 - 4\sqrt{-1}) - 6(4 + 7\sqrt{-1}) = 6 - 12\sqrt{-1} - 24 - 42\sqrt{-1} = -18 - 54\sqrt{-1}$

b) $8(5 - 3\sqrt{-1}) + 4(-3 + 2\sqrt{-1}) = 40 - 24\sqrt{-1} - 12 + 8\sqrt{-1} = 28 - 16\sqrt{-1}$

Multiplicaciones

■ Efectúa las siguientes multiplicaciones:

a) $(4 - 3\sqrt{-1}) \cdot \sqrt{-1}$

b) $(5 + 2\sqrt{-1}) \cdot 8\sqrt{-1}$

c) $(5 + 2\sqrt{-1})(7 - 3\sqrt{-1})$

d) $(5 + 2\sqrt{-1})(5 - 2\sqrt{-1})$

a) $(4 - 3\sqrt{-1}) \cdot \sqrt{-1} = 4\sqrt{-1} - 3(\sqrt{-1})^2 = 4\sqrt{-1} - 3(-1) = 3 + 4\sqrt{-1}$

b) $(5 + 2\sqrt{-1}) \cdot 8\sqrt{-1} = 40\sqrt{-1} + 16(\sqrt{-1})^2 = -16 + 40\sqrt{-1}$

c) $(5 + 2\sqrt{-1})(7 - 3\sqrt{-1}) = 35 - 15\sqrt{-1} + 14\sqrt{-1} - 6(\sqrt{-1})^2 = 35 + 6 - \sqrt{-1} = 41 - \sqrt{-1}$

d) $(5 + 2\sqrt{-1})(5 - 2\sqrt{-1}) = 25 - 10\sqrt{-1} + 10\sqrt{-1} - 4(\sqrt{-1})^2 = 25 + 4 = 29$

Ecuaciones de segundo grado

■ Resuelve:

a) $x^2 + 10x + 29 = 0$

b) $x^2 + 9 = 0$

a) $x^2 + 10x + 29 = 0 \rightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 116}}{2} = \frac{-10 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-10 \pm 4\sqrt{-1}}{2} =$

$$= -5 \pm 2\sqrt{-1} \begin{cases} x_1 = -5 + 2\sqrt{-1} \\ x_2 = -5 - 2\sqrt{-1} \end{cases}$$

b) $x^2 + 9 = 0 \rightarrow x^2 = -9 \rightarrow x = \pm\sqrt{-9} = \pm 3\sqrt{-1} \begin{cases} x_1 = 3\sqrt{-1} \\ x_2 = -3\sqrt{-1} \end{cases}$

Página 149

1. Representa gráficamente los siguientes números complejos y di cuáles son reales, cuáles imaginarios y, de estos, cuáles son imaginarios puros:

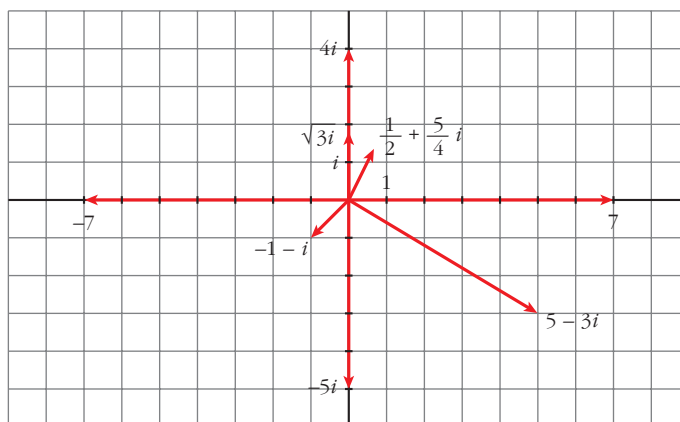
$$5 - 3i; \frac{1}{2} + \frac{5}{4}i; -5i; 7; \sqrt{3}i; 0; -1 - i; -7; 4i$$

- Reales: 7, 0 y -7

$$\text{Imaginarios: } 5 - 3i, \frac{1}{2} + \frac{5}{4}i, -5i, \sqrt{3}i, -1 - i, 4i$$

$$\text{Imaginarios puros: } -5i, \sqrt{3}i, 4i$$

- Representación:



2. Obtén las soluciones de las siguientes ecuaciones y represéntalas:

a) $z^2 + 4 = 0$

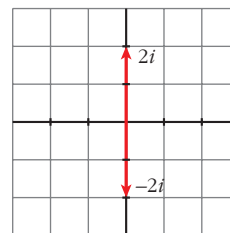
b) $z^2 + 6z + 10 = 0$

c) $3z^2 + 27 = 0$

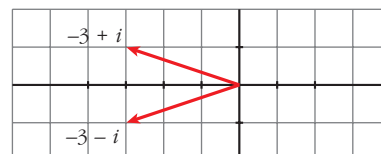
d) $3z^2 - 27 = 0$

$$a) z = \frac{\pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{\pm 4i}{2} = \pm 2i$$

$$z_1 = 2i, z_2 = -2i$$

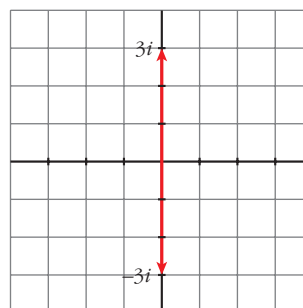


$$b) z = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 40}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-6 \pm 2i}{2} = -3 \pm i; z_1 = -3 - i, z_2 = -3 + i$$



c) $z^2 = -9 \rightarrow z = \pm \sqrt{-9} = \pm 3i$

$z_1 = -3i, z_2 = 3i$



d) $z^2 = 9 \rightarrow z = \pm 3$

$z_1 = -3, z_2 = 3$



3. Representa gráficamente el opuesto y el conjugado de:

a) $3 - 5i$

b) $5 + 2i$

c) $-1 - 2i$

d) $-2 + 3i$

e) 5

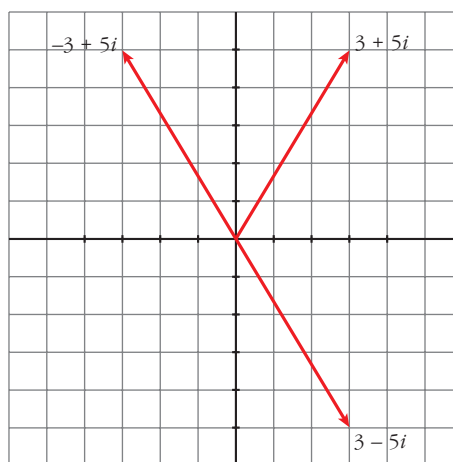
f) 0

g) $2i$

h) $-5i$

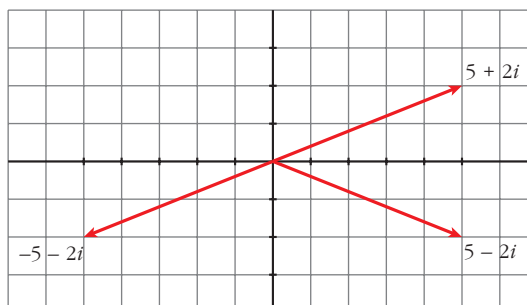
a) Opuesto: $-3 + 5i$

Conjugado: $3 + 5i$



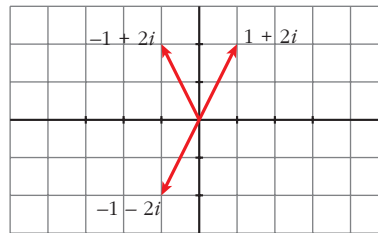
b) Opuesto: $-5 - 2i$

Conjugado: $5 - 2i$



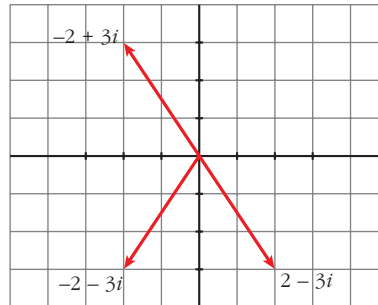
c) Opuesto: $1 + 2i$

Conjugado: $-1 + 2i$



d) Opuesto: $2 - 3i$

Conjugado: $-2 - 3i$



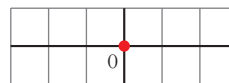
e) Opuesto: -5

Conjugado: 5



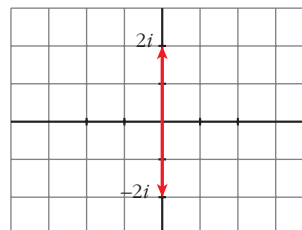
f) Opuesto: 0

Conjugado: 0



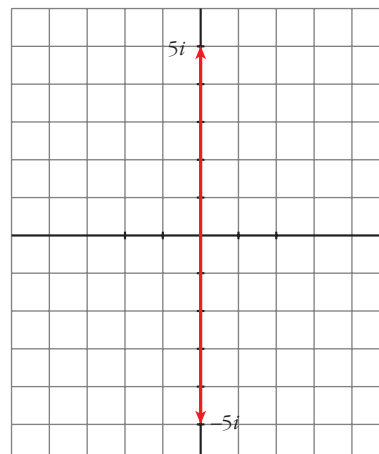
g) Opuesto: $-2i$

Conjugado: $-2i$



h) Opuesto: $5i$

Conjugado: $5i$



4. Sabemos que $i^2 = -1$. Calcula i^3 , i^4 , i^5 , i^6 , i^{20} , i^{21} , i^{22} , i^{23} . Da un criterio para simplificar potencias de i de exponente natural.

$$\begin{array}{llll} i^3 = -i & i^4 = 1 & i^5 = i & i^6 = -1 \\ i^{20} = 1 & i^{21} = i & i^{22} = -1 & i^{23} = -i \end{array}$$

CRITERIO: Dividimos el exponente entre 4 y lo escribimos como sigue:

$$i^n = i^{4c+r} = i^{4c} \cdot i^r = (i^4)^c \cdot i^r = 1^c \cdot i^r = 1 \cdot i^r = i^r$$

Por tanto, $i^n = i^r$, donde r es el resto de dividir n entre 4.

Página 151

1. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica el resultado:

a) $(6 - 5i) + (2 - i) - 2(-5 + 6i)$

b) $(2 - 3i) - (5 + 4i) + \frac{1}{2}(6 - 4i)$

c) $(3 + 2i)(4 - 2i)$

d) $(2 + 3i)(5 - 6i)$

e) $(-i + 1)(3 - 2i)(1 + 3i)$

f) $\frac{2 + 4i}{4 - 2i}$

g) $\frac{1 - 4i}{3 + i}$

h) $\frac{4 + 4i}{-3 + 5i}$

i) $\frac{5 + i}{-2 - i}$

j) $\frac{1 + 5i}{3 + 4i}$

k) $\frac{4 - 2i}{i}$

l) $6 - 3\left(5 + \frac{2}{5}i\right)$

m) $\frac{(-3i)^2(1 - 2i)}{2 + 2i}$

a) $(6 - 5i) + (2 - i) - 2(-5 + 6i) = 6 - 5i + 2 - i + 10 - 12i = 18 - 18i$

b) $(2 - 3i) - (5 + 4i) + \frac{1}{2}(6 - 4i) = 2 - 3i - 5 - 4i + 3 - 2i = -9i$

c) $(3 + 2i)(4 - 2i) = 12 - 6i + 8i - 4i^2 = 12 + 2i + 4 = 16 + 2i$

d) $(2 + 3i)(5 - 6i) = 10 - 12i + 15i - 18i^2 = 10 + 3i + 18 = 28 + 3i$

e) $(-i + 1)(3 - 2i)(1 + 3i) = (-3i + 2i^2 + 3 - 2i)(1 + 3i) = (3 - 2 - 5i)(1 + 3i) =$
 $= (1 - 5i)(1 + 3i) = 1 + 3i - 5i - 15i^2 = 1 + 15 - 2i = 16 - 2i$

f) $\frac{2 + 4i}{4 - 2i} = \frac{(2 + 4i)(4 + 2i)}{(4 - 2i)(4 + 2i)} = \frac{8 + 4i + 16i + 8i^2}{16 - 4i^2} = \frac{20i}{16 + 4} = \frac{20i}{20} = i$

g) $\frac{1 - 4i}{3 + i} = \frac{(1 - 4i)(3 - i)}{(3 + i)(3 - i)} = \frac{3 - i - 12i + 4i^2}{9 - i^2} = \frac{3 - 13i - 4}{9 + 1} = \frac{-1 - 13i}{10} =$
 $= \frac{-1}{10} - \frac{13}{10}i$

$$\begin{aligned} \text{h)} \quad \frac{4+4i}{-3+5i} &= \frac{(4+4i)(-3-5i)}{(-3+5i)(-3-5i)} = \frac{-12-20i-12i-20i^2}{9-25i^2} = \frac{-12-32i+20}{9+25} = \\ &= \frac{8-32i}{34} = \frac{8}{34} - \frac{32}{34}i = \frac{4}{17} - \frac{16}{17}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \frac{5+i}{-2-i} &= \frac{(5+i)(-2+i)}{(-2-i)(-2+i)} = \frac{-10+5i-2i+i^2}{4+1} = \frac{-10+3i-1}{5} = \frac{-11+3i}{5} = \\ &= \frac{-11}{5} + \frac{3}{5}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{j)} \quad \frac{1+5i}{3+4i} &= \frac{(1+5i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{3-4i+15i-20i^2}{9-16i^2} = \frac{3+11i+20}{9+16} = \\ &= \frac{23+11i}{25} = \frac{23}{25} + \frac{11}{25}i \end{aligned}$$

$$\text{k)} \quad \frac{4-2i}{i} = \frac{(4-2i)(-i)}{i(-i)} = \frac{-4i+2i^2}{1} = -4i-2 = -2-4i$$

$$\text{l)} \quad 6-3\left(5+\frac{2}{5}i\right) = 6-15+\frac{6}{5}i = -9+\frac{6}{5}i$$

$$\begin{aligned} \text{m)} \quad \frac{(-3i)^2(1-2i)}{(2+2i)} &= \frac{9i^2(1-2i)}{(2+2i)} = \frac{-9(1-2i)}{(2+2i)} = \frac{-9+18i}{(2+2i)} = \\ &= \frac{(-9+18i)(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)} = \frac{-18+18i+36i-36i^2}{4-4i^2} = \frac{-18+54i+36}{4+4} = \\ &= \frac{18+54i}{8} = \frac{18}{8} + \frac{54}{8}i = \frac{9}{4} + \frac{27}{4}i \end{aligned}$$

2. Obtén polinomios cuyas raíces sean:

$$\text{a)} \quad 2 + \sqrt{3}i \quad \text{y} \quad 2 - \sqrt{3}i \qquad \text{b)} \quad -3i \quad \text{y} \quad 3i \qquad \text{c)} \quad 1 + 2i \quad \text{y} \quad 3 - 4i$$

(Observa que solo cuando las dos raíces son conjugadas, el polinomio tiene coeficientes reales).

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad [x - (2 + \sqrt{3}i)] [x - (2 - \sqrt{3}i)] &= \\ &= [(x-2) - \sqrt{3}i] [(x-2) + \sqrt{3}i] = (x-2)^2 - (\sqrt{3}i)^2 = \\ &= x^2 - 4x + 4 - 3i^2 = x^2 - 4x + 4 + 3 = x^2 - 4x + 7 \end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad [x - (-3i)] [x - 3i] = [x + 3i] [x - 3i] = x^2 - 9i^2 = x^2 + 9$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad [x - (1 + 2i)] [x - (3 - 4i)] &= [(x-1) - 2i] [(x-3) + 4i] = \\ &= (x-1)(x-3) + 4(x-1)i - 2(x-3)i - 8i^2 = \\ &= x^2 - 4x + 3 + (4x-4-2x+6)i + 8 = x^2 - 4x + 11 + (2x+2)i = \\ &= x^2 - 4x + 11 + 2ix + 2i = x^2 + (-4+2i)x + (11+2i) \end{aligned}$$

3. ¿Cuánto debe valer x , real, para que $(25 - xi)^2$ sea imaginario puro?

$$(25 - xi)^2 = 625 + x^2 i^2 - 50xi = (625 - x^2) - 50xi$$

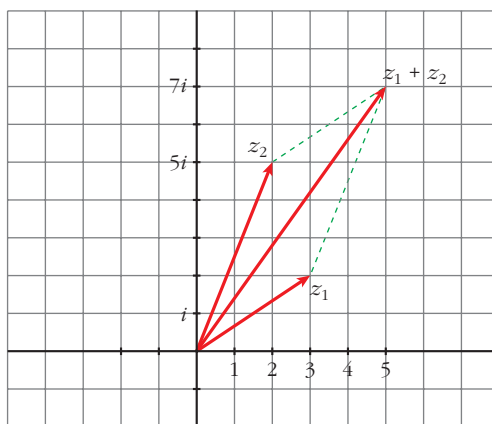
Para que sea imaginario puro:

$$625 - x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 625 \rightarrow x = \pm\sqrt{625} = \pm 25$$

Hay dos soluciones: $x_1 = -25$, $x_2 = 25$

4. Representa gráficamente $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 2 + 5i$, $z_1 + z_2$. Comprueba que $z_1 + z_2$ es una diagonal del paralelogramo de lados z_1 y z_2 .

$$z_1 + z_2 = 5 + 7i$$



Página 153

1. Escribe en forma polar los siguientes números complejos:

a) $1 + \sqrt{3}i$

b) $\sqrt{3} + i$

c) $-1 + i$

d) $5 - 12i$

e) $3i$

f) -5

a) $1 + \sqrt{3}i = 2_{60^\circ}$

b) $\sqrt{3} + i = 2_{30^\circ}$

c) $-1 + i = \sqrt{2}_{135^\circ}$

d) $5 - 12i = 13_{292^\circ 37'}$

e) $3i = 3_{90^\circ}$

f) $-5 = 5$

2. Escribe en forma binómica los siguientes números complejos:

a) $5_{(\pi/6) \text{ rad}}$

b) 2_{135°

c) 2_{495°

d) 3_{240°

e) 5_{180°

f) 4_{90°

a) $5_{(\pi/6)} = 5 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 5 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$

b) $2_{135^\circ} = 2 \left(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ \right) = 2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

$$c) 2_{495^\circ} = 2_{135^\circ} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

$$d) 3_{240^\circ} = 3(\cos 240^\circ + i \operatorname{sen} 240^\circ) = 3\left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

$$e) 5_{180^\circ} = -5$$

$$f) 4_{90^\circ} = 4i$$

3. Expresa en forma polar el opuesto y el conjugado del número complejo $z = r_\alpha$.

$$\text{Opuesto: } -z = r_{180^\circ + \alpha}$$

$$\text{Conjugado: } \bar{z} = r_{360^\circ - \alpha}$$

4. Escribe en forma binómica y en forma polar el complejo:

$$z = 8(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)$$

$$z = 8_{30^\circ} = 8(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ) = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}\right) = \frac{8\sqrt{3}}{2} + \frac{8}{2}i = 4\sqrt{3} + 4i$$

5. Sean los números complejos $z_1 = 4_{60^\circ}$ y $z_2 = 3_{210^\circ}$.

a) Expresa z_1 y z_2 en forma binómica.

b) Halla $z_1 \cdot z_2$ y z_2/z_1 , y pasa los resultados a forma polar.

c) Compara los módulos y los argumentos de $z_1 \cdot z_2$ y z_2/z_1 con los de z_1 y z_2 e intenta encontrar relaciones entre ellos.

$$a) z_1 = 4_{60^\circ} = 4(\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ) = 4\left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 + 2\sqrt{3}i$$

$$z_2 = 3_{210^\circ} = 3(\cos 210^\circ + i \operatorname{sen} 210^\circ) = 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$$

$$b) z_1 \cdot z_2 = (2 + 2\sqrt{3}i) \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right) =$$

$$= -3\sqrt{3} - 3i - 9i - 3\sqrt{3}i^2 = -3\sqrt{3} - 12i + 3\sqrt{3} = -12i = 12_{270^\circ}$$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right)}{(2 + 2\sqrt{3}i)} = \frac{\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right)(2 - 2\sqrt{3}i)}{(2 + 2\sqrt{3}i)(2 - 2\sqrt{3}i)} =$$

$$= \frac{-3\sqrt{3} - 3i + 9i + 3\sqrt{3}i^2}{4 - 12i^2} = \frac{-3\sqrt{3} + 6i - 3\sqrt{3}}{4 + 12} = \frac{-6\sqrt{3} + 6i}{16} = \left(\frac{3}{4}\right)_{150^\circ}$$

$$c) z_1 \cdot z_2 = 4_{60^\circ} \cdot 3_{210^\circ} = (4 \cdot 3)_{60^\circ + 210^\circ} = 12_{270^\circ}$$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{3_{210^\circ}}{4_{60^\circ}} = \left(\frac{3}{4}\right)_{210^\circ - 60^\circ} = \left(\frac{3}{4}\right)_{150^\circ}$$

Página 155

1. Efectúa estas operaciones y da el resultado en forma polar y en forma binómica:

a) $1_{150^\circ} \cdot 5_{30^\circ}$

b) $6_{45^\circ} : 3_{15^\circ}$

c) $2_{10^\circ} \cdot 1_{40^\circ} \cdot 3_{70^\circ}$

d) $5_{(2\pi/3)\text{rad}} : 1_{60^\circ}$

e) $(1 - \sqrt{3}i)^5$

f) $(3 + 2i) + (-3 + 2i)$

a) $1_{150^\circ} \cdot 5_{30^\circ} = 5_{180^\circ} = -5$

b) $6_{45^\circ} : 3_{15^\circ} = 2_{30^\circ} = 2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$

c) $2_{10^\circ} \cdot 1_{40^\circ} \cdot 3_{70^\circ} = 6_{120^\circ} = 6(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ) = 6\left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3 + 3\sqrt{3}i$

d) $5_{(2\pi/3)\text{rad}} : 1_{60^\circ} = 5_{120^\circ} : 1_{60^\circ} = 5_{60^\circ} = 5(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) =$
 $= 5\left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i$

e) $(1 - \sqrt{3}i)^5 = (2_{300^\circ})^5 = 32_{1500^\circ} = 32_{60^\circ} = 32(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) =$
 $= 32\left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 16 + 16\sqrt{3}i$

f) $4i = 4_{90^\circ}$

2. Compara los resultados en cada caso:

a) $(2_{30^\circ})^3$, $(2_{150^\circ})^3$, $(2_{270^\circ})^3$

b) $(2_{60^\circ})^4$, $(2_{150^\circ})^4$, $(2_{270^\circ})^4$, $(2_{330^\circ})^4$

a) $(2_{30^\circ})^3 = 2^3_{3 \cdot 30^\circ} = 8_{90^\circ}$

$(2_{150^\circ})^3 = 2^3_{3 \cdot 150^\circ} = 8_{450^\circ} = 8_{90^\circ}$

$(2_{270^\circ})^3 = 8_{3 \cdot 270^\circ} = 8_{810^\circ} = 8_{90^\circ}$

b) $(2_{60^\circ})^4 = 2^4_{4 \cdot 60^\circ} = 16_{240^\circ}$

$(2_{150^\circ})^4 = 16_{600^\circ} = 16_{240^\circ}$

$(2_{270^\circ})^4 = 16_{1080^\circ} = 16_{0^\circ}$

$(2_{330^\circ})^4 = 16_{1320^\circ} = 16_{240^\circ}$

3. Dados los complejos $z = 5_{45^\circ}$, $w = 2_{15^\circ}$, $t = 4i$, obtén en forma polar:

a) $z \cdot t$

b) $\frac{z}{w^2}$

c) $\frac{z^3}{w \cdot t^2}$

d) $\frac{z \cdot w^3}{t}$

$z = 5_{45^\circ}$

$w = 2_{15^\circ}$

$t = 4i = 4_{90^\circ}$

$$\begin{aligned}
 \text{a) } z \cdot w &= 10_{60^\circ} \\
 \text{b) } \frac{z}{w^2} &= \frac{z}{4_{30^\circ}} = \frac{5_{45^\circ}}{4_{30^\circ}} = \left(\frac{5}{4}\right)_{15^\circ} \\
 \text{c) } \frac{z^3}{w \cdot t^2} &= \frac{125_{135^\circ}}{2_{15^\circ} \cdot 16_{180^\circ}} = \left(\frac{125}{32}\right)_{-60^\circ} = \left(\frac{125}{32}\right)_{300^\circ} \\
 \text{d) } \frac{z \cdot w^3}{t} &= \frac{5_{45^\circ} \cdot 8_{45^\circ}}{4_{90^\circ}} = 10_{0^\circ} = 10
 \end{aligned}$$

- 4. Expresa $\cos 3\alpha$ y $\sin 3\alpha$ en función de $\sin \alpha$ y $\cos \alpha$ utilizando la fórmula de Moivre. Ten en cuenta que:**

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\begin{aligned}
 (1_\alpha)^3 &= 1(\cos \alpha + i \sin \alpha)^3 = \\
 &= \cos^3 \alpha + i 3 \cos^2 \alpha \sin \alpha + 3i^2 \cos \alpha \sin^2 \alpha + i^3 \sin^3 \alpha = \\
 &= \cos^3 \alpha + 3 \cos^2 \alpha \sin \alpha i - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha - i \sin^3 \alpha = \\
 &= (\cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha) + (3 \cos^2 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha) i
 \end{aligned}$$

Por otra parte: $(1_\alpha)^3 = 1_{3\alpha} = \cos 3\alpha + i \sin 3\alpha$

Por tanto: $\cos 3\alpha = \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha$

$$\sin 3\alpha = 3 \cos^2 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha$$

Página 157

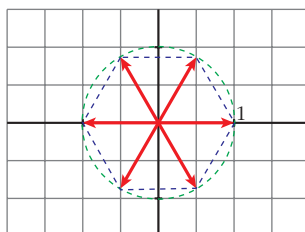
- 1. Halla las seis raíces sextas de 1. Representálas y exprésalas en forma binómica.**

$$\sqrt[6]{1} = \sqrt[6]{1_{0^\circ}} = 1_{(360^\circ \cdot k)/6} = 1_{60^\circ \cdot k}; \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

Las seis raíces son:

$$\begin{aligned}
 1_{0^\circ} &= 1 & 1_{60^\circ} &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i & 1_{120^\circ} &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\
 1_{180^\circ} &= -1 & 1_{240^\circ} &= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i & 1_{300^\circ} &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i
 \end{aligned}$$

Representación:



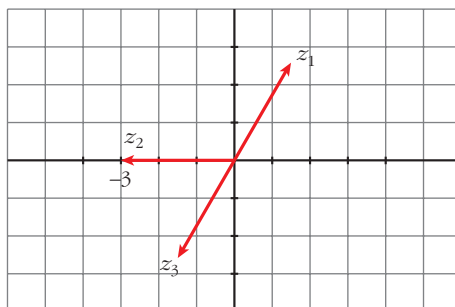
2. Resuelve la ecuación $z^3 + 27 = 0$. Representa sus soluciones.

$$z^3 + 27 = 0 \rightarrow z = \sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{27_{180^\circ}} = 3_{(180^\circ + 360^\circ n)/3} = 3_{60^\circ + 120^\circ n}; \quad n = 0, 1, 2$$

$$z_1 = 3_{60^\circ} = 3(\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ) = 3\left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_2 = 3_{180^\circ} = -3$$

$$z_3 = 3_{240^\circ} = 3(\cos 240^\circ + i \operatorname{sen} 240^\circ) = 3\left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$



3. Calcula:

a) $\sqrt[3]{-i}$

b) $\sqrt[4]{-8 + 8\sqrt{3}i}$

c) $\sqrt{-25}$

d) $\sqrt{\frac{-2 + 2i}{1 + \sqrt{3}i}}$

a) $\sqrt[3]{-i} = \sqrt[3]{1_{270^\circ}} = 1_{(270^\circ + 360^\circ k)/3}; \quad k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:

$$1_{90^\circ} = i \quad 1_{210^\circ} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \quad 1_{330^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

b) $\sqrt[4]{-8 + 8\sqrt{3}i} = \sqrt[4]{16_{120^\circ}} = 2_{(120^\circ + 360^\circ k)/4} = 2_{30^\circ + 90^\circ k}; \quad k = 0, 1, 2, 3$

Las cuatro raíces son:

$$2_{30^\circ} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$$

$$2_{120^\circ} = 2\left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + \sqrt{3}i$$

$$2_{210^\circ} = 2\left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - \sqrt{3}i$$

$$2_{300^\circ} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} - i$$

$$c) \sqrt{-25} = \sqrt{25_{180^\circ}} = 5_{(180^\circ + 360^\circ k)/2} = 5_{90^\circ + 180^\circ k}; \quad k = 0, 1$$

Las dos raíces son: $5_{90^\circ} = 5i$; $5_{270^\circ} = -5i$

$$d) \sqrt[3]{\frac{-2 + 2i}{1 + \sqrt{3}i}} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{8}_{135^\circ}}{2_{60^\circ}}} = \sqrt[3]{\sqrt{2}_{75^\circ}} = \sqrt[6]{2_{(75^\circ + 360^\circ k)/3}} = \sqrt[6]{2_{25^\circ + 120^\circ k}}; \quad k = 0, 1, 2$$

Las tres raíces son: $\sqrt[6]{2}_{25^\circ}$; $\sqrt[6]{2}_{145^\circ}$; $\sqrt[6]{2}_{265^\circ}$

4. Resuelve las ecuaciones:

a) $z^4 + 1 = 0$

b) $z^6 + 64 = 0$

$$a) z^4 + 1 = 0 \rightarrow z = \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{1_{180^\circ}} = 1_{(180^\circ + 360^\circ k)/2} = 1_{45^\circ + 90^\circ k}; \quad k = 0, 1, 2, 3$$

Las cuatro raíces son:

$$1_{45^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i; \quad 1_{135^\circ} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i; \quad 1_{225^\circ} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i; \quad 1_{315^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$b) z^6 + 64 = 0 \rightarrow z = \sqrt[6]{-64} = \sqrt[6]{64_{180^\circ}} = 2_{(180^\circ + 360^\circ k)/6} = 2_{30^\circ + 60^\circ k}; \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

Las seis raíces son:

$$2_{30^\circ} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i \quad 2_{90^\circ} = 2i$$

$$2_{150^\circ} = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} + i \quad 2_{210^\circ} = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} - i$$

$$2_{270^\circ} = -2i \quad 2_{330^\circ} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} - i$$

5. Comprueba que si z y w son dos raíces sextas de 1, entonces también lo son los resultados de las siguientes operaciones:

$$z \cdot w, z/w, z^2, z^3$$

$$z \text{ y } w \text{ raíces sextas de } 1 \rightarrow z^6 = 1, w^6 = 1$$

$$(z \cdot w)^6 = z^6 \cdot w^6 = 1 \cdot 1 = 1 \rightarrow z \cdot w \text{ es raíz sexta de } 1.$$

$$\left(\frac{z}{w}\right)^6 = \frac{z^6}{w^6} = \frac{1}{1} = 1 \rightarrow \frac{z}{w} \text{ es raíz sexta de } 1.$$

$$z^2 = (z^2)^6 = z^{12} = (z^4)^3 = 1^3 = 1 \rightarrow z^2 \text{ es raíz sexta de } 1.$$

$$z^3 = (z^3)^6 = z^{18} = z^{16} \cdot z^2 = (z^4)^4 \cdot z^2 = 1^4 \cdot 1^2 = 1 \cdot 1 = 1 \rightarrow z^3 \text{ es raíz sexta de } 1.$$

- 6. El número $4 + 3i$ es la raíz cuarta de un cierto número complejo, z . Halla las otras tres raíces cuartas de z .**

$$4 + 3i = 5_{36^\circ 52'}$$

Las otras tres raíces cuartas de z serán:

$$5_{36^\circ 52' + 90^\circ} = 5_{126^\circ 52'} = -3 + 4i$$

$$5_{36^\circ 52' + 180^\circ} = 5_{216^\circ 52'} = -4 - 3i$$

$$5_{36^\circ 52' + 270^\circ} = 5_{306^\circ 52'} = 3 - 4i$$

- 7. Calcula las siguientes raíces y representa gráficamente sus soluciones:**

a) $\sqrt[3]{-9}$

b) $\sqrt[3]{-27}$

c) $\sqrt[3]{2 - 2i}$

d) $\sqrt[3]{\frac{1-i}{1+i}}$

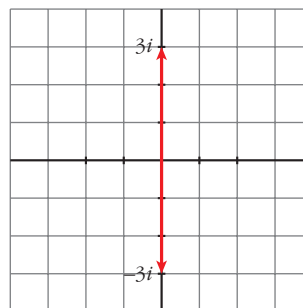
e) $\sqrt[5]{\frac{32}{i}}$

f) $\sqrt[3]{8i}$

a) $\sqrt{-9} = \sqrt{9_{180^\circ}} = 3_{(180^\circ + 360^\circ k)/2} = 3_{90^\circ + 180^\circ k}; k = 0, 1$

Las dos raíces son:

$$3_{90^\circ} = 3i; \quad 3_{270^\circ} = -3i$$



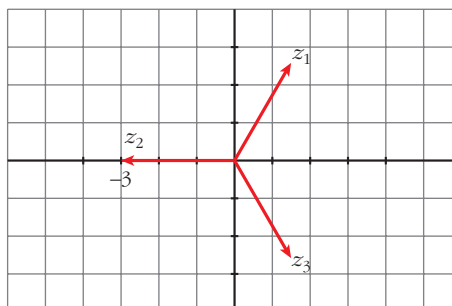
b) $\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{27_{180^\circ}} = 3_{(180^\circ + 360^\circ k)/3} = 3_{60^\circ + 120^\circ k}; k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:

$$z_1 = 3_{60^\circ} = 3(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = 3\left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_2 = 3_{180^\circ} = -3$$

$$z_3 = 3_{300^\circ} = 3(\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ) = 3\left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$



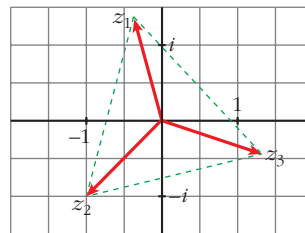
$$c) \sqrt[3]{2-2i} = \sqrt[3]{\sqrt{8} \cdot 315^\circ} = \sqrt{2}_{(315^\circ + 360^\circ k)/3} = \sqrt{2}_{105^\circ + 120^\circ k}; \quad k = 0, 1, 2$$

Las tres raíces son:

$$z_1 = \sqrt{2}_{105^\circ} = -0,37 + 1,37i$$

$$z_2 = \sqrt{2}_{225^\circ} = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = -1 - i$$

$$z_3 = \sqrt{2}_{345^\circ} = 1,37 - 0,37i$$



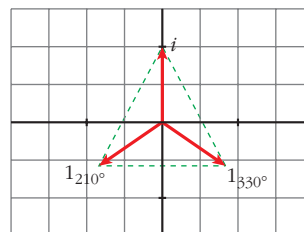
$$d) \sqrt[3]{\frac{1-i}{1+i}} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2} \cdot 315^\circ}{\sqrt{2} \cdot 45^\circ}} = \sqrt[3]{1}_{270^\circ} = 1_{(270^\circ + 360^\circ k)/3} = 1_{90^\circ + 120^\circ k}; \quad k = 0, 1, 2$$

Las tres raíces son:

$$1_{90^\circ} = i$$

$$1_{210^\circ} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$1_{330^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$



$$e) \sqrt[5]{-\frac{32}{i}} = \sqrt[5]{-\frac{32(-i)}{i(-i)}} = \sqrt[5]{32i} = \sqrt[5]{32}_{90^\circ} = 2_{(90^\circ + 360^\circ k)/5} = 2_{18^\circ + 72^\circ k}; \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

Las cinco raíces son:

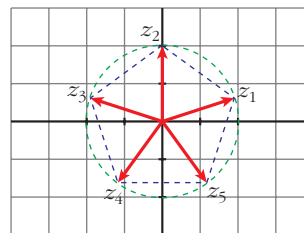
$$z_1 = 2_{18^\circ} = 1,9 + 0,6i$$

$$z_2 = 2_{90^\circ} = 2i$$

$$z_3 = 2_{162^\circ} = -1,9 + 0,6i$$

$$z_4 = 2_{234^\circ} = -1,2 - 1,6i$$

$$z_5 = 2_{306^\circ} = 1,2 - 1,6i$$



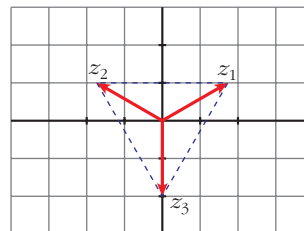
$$f) \sqrt[3]{8i} = \sqrt[3]{8}_{90^\circ} = 2_{(90^\circ + 360^\circ k)/3} = 2_{30^\circ + 120^\circ k}; \quad k = 0, 1, 2$$

Las tres son:

$$z_1 = 2_{30^\circ}$$

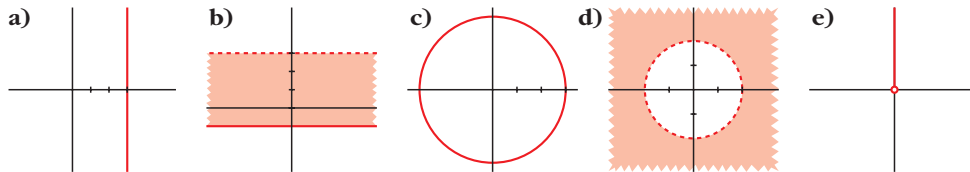
$$z_2 = 2_{150^\circ}$$

$$z_3 = 2_{270^\circ}$$



LENGUAJE MATEMÁTICO

1. Pon la ecuación o inecuación que caracteriza los siguientes recintos o líneas:

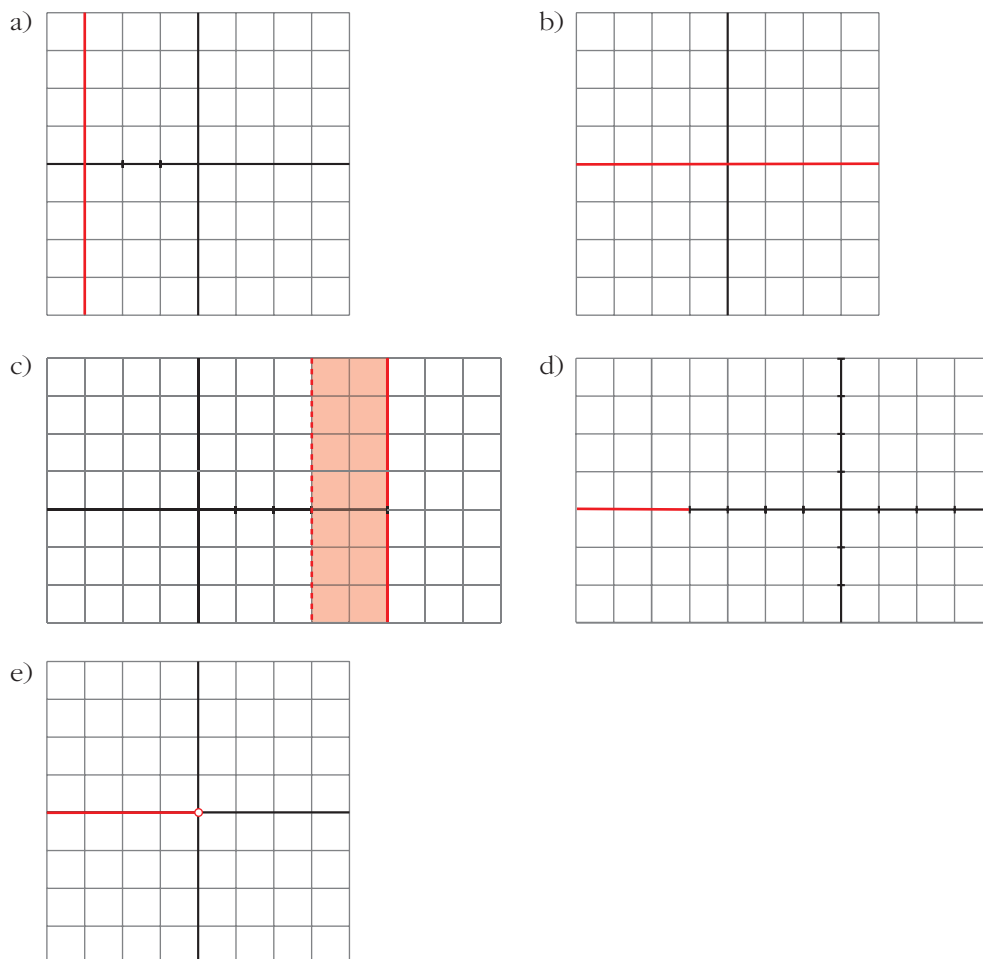


Describe con palabras cada una de las familias (“son los números complejos cuya parte real vale ...”) y da un representante de cada una de ellas.

- a) $Re z = 3$ b) $-1 \leq Im z < 3$ c) $|z| = 3$ d) $|z| > 2$ e) $Arg z = 90^\circ$

2. Representa:

- a) $Re z = -3$ b) $Im z = 0$ c) $3 < Re z \leq 5$ d) $|z| \geq 4$ e) $Arg z = 180^\circ$



EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Números complejos en forma binómica

1 Calcula:

a) $(3 + 2i)(2 - i) - (1 - i)(2 - 3i)$ b) $3 + 2i(-1 + i) - (5 - 4i)$

c) $-2i - (4 - i)5i$ d) $(4 - 3i)(4 + 3i) - (4 - 3i)^2$

$$\begin{aligned} \text{a) } (3 + 2i)(2 - i) - (1 - i)(2 - 3i) &= 6 - 3i + 4i - 2i^2 - 2 + 3i + 2i - 3i^2 = \\ &= 6 - 3i + 4i + 2 - 2 + 3i + 2i + 3 = 9 + 6i \end{aligned}$$

$$\text{b) } 3 + 2i(-1 + i) - (5 - 4i) = 3 - 2i + 2i^2 - 5 + 4i = 3 - 2i - 2 - 5 + 4i = -4 + 2i$$

$$\text{c) } -2i - (4 - i)5i = -2i - 20i + 5i^2 = -22i - 5 = -5 - 22i$$

$$\begin{aligned} \text{d) } (4 - 3i)(4 + 3i) - (4 - 3i)^2 &= 16 - (3i)^2 - 16 - 9i^2 + 24i = \\ &= 16 + 9 - 16 + 9 + 24i = 18 + 24i \end{aligned}$$

2 Calcula en forma binómica:

a) $\frac{(3 + 3i)(4 - 2i)}{2 - 2i}$

b) $\frac{-2 + 3i}{(4 + 2i)(-1 + i)}$

c) $\frac{2 + 5i}{3 - 2i}(1 - i)$

d) $\frac{1 + i}{2 - i} + \frac{-3 - 2i}{1 + 3i}$

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{(3 + 3i)(4 - 2i)}{2 - 2i} &= \frac{12 - 6i + 12i - 6i^2}{2 - 2i} = \frac{18 + 6i}{2 - 2i} = \frac{(18 + 6i)(2 + 2i)}{(2 - 2i)(2 + 2i)} = \\ &= \frac{36 + 36i + 12i - 12}{4 + 4} = \frac{24 + 48i}{8} = 3 + 6i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{-2 + 3i}{(4 + 2i)(-1 + i)} &= \frac{-2 + 3i}{-4 + 4i - 2i - 2} = \frac{-2 + 3i}{-6 + 2i} = \frac{(-2 + 3i)(-6 - 2i)}{(-6 + 2i)(-6 - 2i)} = \\ &= \frac{12 + 4i - 18i + 6}{36 + 4} = \frac{18 - 14i}{40} = \frac{9 - 7i}{20} = \frac{9}{20} - \frac{7}{20}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{2 + 5i}{3 - 2i}(1 - i) &= \frac{2 - 2i + 5i + 5}{3 - 2i} = \frac{7 + 3i}{3 - 2i} = \frac{(7 + 3i)(3 + 2i)}{(3 - 2i)(3 + 2i)} = \\ &= \frac{21 + 14i + 9i - 6}{9 + 4} = \frac{15 + 23i}{13} = \frac{15}{13} + \frac{23}{13}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } \frac{1+i}{2-i} + \frac{-3-2i}{1+3i} &= \frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} + \frac{(-3-2i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \\
 &= \frac{2+i+2i-1}{4+1} + \frac{-3+9i-2i-6}{1+9} = \frac{1+3i}{5} + \frac{-9+7i}{10} = \\
 &= \frac{2+6i-9+7i}{10} = \frac{-7+13i}{10} = \frac{-7}{10} + \frac{13}{10}i
 \end{aligned}$$

3 Dados los números complejos $z = 1 - 3i$, $w = -3 + 2i$, $t = -2i$, calcula:

a) zwt

b) $zt - w(t + z)$

c) $\frac{w}{z}t$

d) $\frac{2z-3t}{w}$

e) $\frac{3z+it}{3}w$

f) $\frac{z^2-wt^2}{2}$

$$z = 1 - 3i; \quad w = -3 + 2i; \quad t = -2i$$

$$\begin{aligned}
 \text{a) } zwt &= (1 - 3i)(-3 + 2i)(-2i) = (-3 + 2i + 9i - 6i^2)(-2i) = \\
 &= (3 + 11i)(-2i) = -6i - 22i^2 = 22 - 6i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } zt - w(t + z) &= (1 - 3i)(-2i) - (-3 + 2i)(-2i + 1 - 3i) = \\
 &= (-2i + 6i^2) - (-3 + 2i)(1 - 5i) = (-6 - 2i) - (-3 + 2i)(1 - 5i) = \\
 &= (-6 - 2i) - (-3 + 15i + 2i - 10i^2) = (-6 - 2i) - (7 + 17i) = -13 - 19i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \frac{w}{z}t &= \frac{-3+2i}{1-3i}(-2i) = \frac{6i-4i^2}{1-3i} = \frac{(4+6i)(1+3i)}{1^2-(3i)^2} = \\
 &= \frac{4+12i+6i+18i^2}{1+9} = \frac{-14+18i}{10} = -\frac{7}{5} + \frac{9}{5}i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } \frac{2z-3t}{w} &= \frac{2(1-3i)-3(-2i)}{-3+2i} = \frac{2-6i+6i}{-3+2i} = \frac{2(-3-2i)}{(-3)^2-(2i)^2} = \\
 &= \frac{-6-4i}{9+4} = -\frac{6}{13} - \frac{4}{13}i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{e) } \frac{3z+it}{3}w &= \frac{3(1-3i)+i(-2i)}{3}(-3+2i) = \frac{3-9i+2}{3}(-3+2i) = \\
 &= \left(\frac{5}{3}-3i\right)(-3+2i) = -5 + \frac{10}{3}i + 9i - 6i^2 = 1 + \frac{37}{3}i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{f) } \frac{z^2-wt^2}{2} &= \frac{(1-3i)^2-(-3+2i)(-2i)^2}{2} = \frac{1-6i+9i^2-(-3+2i)(-4)}{2} = \\
 &= \frac{-8-6i-12+8i}{2} = \frac{-20+2i}{2} = -10 + i
 \end{aligned}$$

4 Calcula:

a) i^{37} b) i^{126} c) i^{-7} d) i^{64} e) i^{-216}

a) $i^{37} = i^1 = i$

b) $i^{126} = i^2 = -1$

c) $i^{-7} = \frac{1}{i^7} = \frac{1}{-i} = i$

d) $i^{64} = i^0 = 1$

e) $i^{-216} = \frac{1}{i^{216}} = \frac{1}{i^0} = \frac{1}{1} = 1$

5 Dado el número complejo $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, prueba que:

a) $1 + z + z^2 = 0$

b) $\frac{1}{z} = z^2$

$$\begin{aligned} \text{a) } z^2 &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}i^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \\ &= -\frac{2}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

$$1 + z + z^2 = 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 0$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{1}{z} &= \frac{1}{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} = \frac{1}{\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}} = \frac{2}{-1 + \sqrt{3}i} = \frac{2(-1 - \sqrt{3}i)}{(-1 + \sqrt{3}i)(-1 - \sqrt{3}i)} = \\ &= \frac{2(-1 - \sqrt{3}i)}{1 + 3} = \frac{2(-1 - \sqrt{3}i)}{4} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

$$z^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad (\text{lo habíamos calculado en a})$$

Por tanto: $\frac{1}{z} = z^2$

Igualdad de números complejos**6** Calcula m y n para que se verifique la igualdad $(2 + mi) + (n + 5i) = 7 - 2i$.

$$(2 + mi) + (n + 5i) = 7 - 2i$$

$$(2 + n) + (m + 5)i = 7 - 2i \rightarrow \begin{cases} 2 + n = 7 \\ m + 5 = -2 \end{cases} \begin{matrix} n = 5 \\ m = -7 \end{matrix}$$

- 7** Determina k para que el cociente $\frac{k+i}{1+i}$ sea igual a $2-i$.

$$\begin{aligned}\frac{k+i}{1+i} &= \frac{(k+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{k-ki+i+1}{1+1} = \frac{(k+1) + (1-k)i}{2} = \\ &= \left(\frac{k+1}{2}\right) + \left(\frac{1-k}{2}\right)i = 2-i \rightarrow \begin{cases} \frac{k+1}{2} = 2 \rightarrow k=3 \\ \frac{1-k}{2} = -1 \rightarrow k=3 \end{cases}\end{aligned}$$

Por tanto, $k=3$.

- 8** Calcula a y b de modo que se verifique:

$$(a+bi)^2 = 3+4i$$

Desarrolla el cuadrado; iguala la parte real a 3, y la parte imaginaria a 4.

$$(a+bi)^2 = 3+4i$$

$$a^2 + bi^2 + 2abi = 3+4i$$

$$a^2 - b^2 + 2abi = 3+4i \rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = 4 \end{cases}$$

$$b = \frac{4}{2a} = \frac{2}{a}$$

$$a^2 - \left(\frac{2}{a}\right)^2 = 3 \rightarrow a^2 - \frac{4}{a^2} = 3 \rightarrow a^4 - 4 = 3a^2 \rightarrow a^4 - 3a^2 - 4 = 0$$

$$a^2 = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \begin{cases} a^2 = 4 \rightarrow a = \pm 2 \\ a^2 = -1 \text{ (no vale)} \end{cases}$$

$$a = -2 \rightarrow b = -1$$

$$a = 2 \rightarrow b = 1$$

- 9** Dados los complejos $2-ai$ y $3-bi$, halla a y b para que su producto sea igual a $8+4i$.

$$(2-ai)(3-bi) = 8+4i$$

$$6-2bi-3ai+abi^2 = 8+4i$$

$$6-2bi-3ai-ab = 8+4i$$

$$(6-ab) + (-2b-3a)i = 8+4i$$

$$\begin{cases} 6-ab = 8 \\ -2b-3a = 4 \end{cases}$$

$$b = \frac{4+3a}{-2}$$

$$6 - a\left(\frac{4 + 3a}{-2}\right) = 8 \rightarrow 6 + \frac{4a + 3a^2}{2} = 8$$

$$\frac{4a + 3a^2}{2} = 2 \rightarrow 4a + 3a^2 = 4 \rightarrow 3a^2 + 4a - 4 = 0$$

$$a = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 48}}{6} = \frac{-4 \pm 8}{6} \begin{cases} a = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \rightarrow b = -3 \\ a = \frac{-12}{6} = -2 \rightarrow b = 1 \end{cases}$$

- 10** Calcula el valor de a y b para que se verifique:

$$a - 3i = \frac{2 + bi}{5 - 3i}$$

$$a - 3i = \frac{2 + bi}{5 - 3i}$$

$$(a - 3i)(5 - 3i) = 2 + bi$$

$$5a - 3ai - 15i - 9 = 2 + bi$$

$$(5a - 9) + (-3a - 15)i = 2 + bi$$

$$\left. \begin{array}{l} 5a - 9 = 2 \\ -3a - 15 = b \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = 11/5 \\ b = -108/5 \end{array}$$

- 11** Halla el valor de b para que el producto $(3 - 6i)(4 + bi)$ sea un número:

a) Imaginario puro.

b) Real.

$$(3 - 6i)(4 + bi) = 12 + 3bi - 24i + 6b = (12 + 6b) + (3b - 24)i$$

a) $12 + 6b = 0 \rightarrow b = -2$

b) $3b - 24 = 0 \rightarrow b = 8$

- 12** Determina a para que $(a - 2i)^2$ sea un número imaginario puro.

$$(a - 2i)^2 = a^2 + 4i^2 - 4ai = (a^2 - 4) - 4ai$$

Para que sea imaginario puro, ha de ser:

$$a^2 - 4 = 0 \rightarrow a = \pm 2 \rightarrow a_1 = -2, a_2 = 2$$

- 13** Calcula x para que el resultado del producto $(x + 2 + ix)(x - i)$ sea un número real.

$$(x + 2 + ix)(x - i) = x^2 - xi + 2x - 2i + x^2i - xi^2 =$$

$$= x^2 - xi + 2x - 2i + ix^2 + x = (x^2 + 3x) + (x^2 - x - 2)i$$

Para que sea real, ha de ser:

$$x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Números complejos en forma polar

14 Representa estos números complejos, sus opuestos y sus conjugados. Exprésalos en forma polar.

a) $1 - i$

b) $-1 + i$

c) $\sqrt{3} + i$

d) $-\sqrt{3} - i$

e) -4

f) $2i$

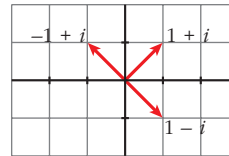
g) $-\frac{3}{4}i$

h) $2 + 2\sqrt{3}i$

a) $1 - i = \sqrt{2}_{315^\circ}$

Opuesto: $-1 + i = \sqrt{2}_{135^\circ}$

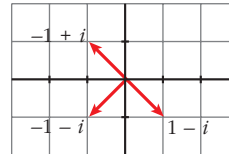
Conjugado: $1 + i = \sqrt{2}_{45^\circ}$



b) $-1 + i = \sqrt{2}_{135^\circ}$

Opuesto: $1 - i = \sqrt{2}_{315^\circ}$

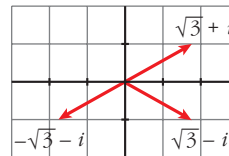
Conjugado: $-1 - i = \sqrt{2}_{225^\circ}$



c) $\sqrt{3} + i = 2_{30^\circ}$

Opuesto: $-\sqrt{3} - i = 2_{210^\circ}$

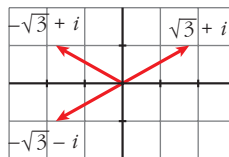
Conjugado: $\sqrt{3} - i = 2_{330^\circ}$



d) $-\sqrt{3} - i = 2_{210^\circ}$

Opuesto: $\sqrt{3} + i = 2_{30^\circ}$

Conjugado: $-\sqrt{3} + i = 2_{150^\circ}$



e) $-4 = 4_{180^\circ}$

Opuesto: $4 = 4_0^\circ$

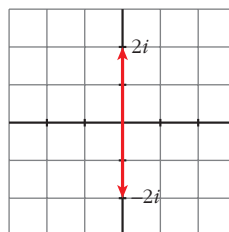
Conjugado: $-4 = 4_{180^\circ}$



f) $2i = 2_{90^\circ}$

Opuesto: $-2i = 2_{270^\circ}$

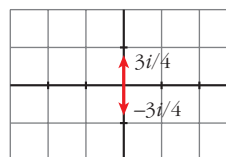
Conjugado: $-2i = 2_{270^\circ}$



$$g) -\frac{3}{4}i = \left(\frac{3}{4}\right)_{270^\circ}$$

$$\text{Opuesto: } \frac{3}{4}i = \left(\frac{3}{4}\right)_{90^\circ}$$

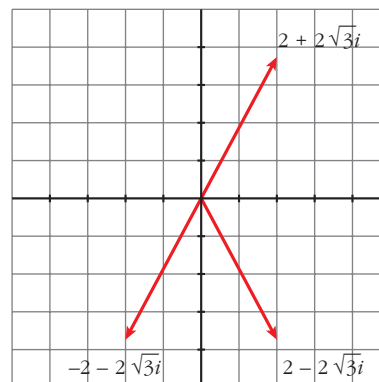
$$\text{Conjugado: } \frac{3}{4}i = \left(\frac{3}{4}\right)_{90^\circ}$$



$$h) 2 + 2\sqrt{3}i = \sqrt{14}_{60^\circ}$$

$$\text{Opuesto: } -2 - 2\sqrt{3}i = \sqrt{14}_{240^\circ}$$

$$\text{Conjugado: } 2 - 2\sqrt{3}i = \sqrt{14}_{300^\circ}$$



15 Escribe en forma binómica los siguientes números complejos:

a) 2_{45°

b) $3_{(\pi/6)}$

c) $\sqrt{2}_{180^\circ}$

d) 17_{0°

e) $1_{(\pi/2)}$

f) 5_{270°

g) 1_{150°

h) 4_{100°

$$a) 2_{45^\circ} = 2(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

$$b) 3_{(\pi/6)} = 3\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right) = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

$$c) \sqrt{2}_{180^\circ} = \sqrt{2}(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = \sqrt{2}(-1 + i \cdot 0) = -\sqrt{2}$$

$$d) 17_{0^\circ} = 17$$

$$e) 1_{(\pi/2)} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$$

$$f) 5_{270^\circ} = -5i$$

$$g) 1_{150^\circ} = \cos 150^\circ + i \sin 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$h) 4_{100^\circ} = 4(\cos 100^\circ + i \sin 100^\circ) = 4(-0,17 + i \cdot 0,98) = -0,69 + 3,94i$$

16 Dados los números complejos:

$$z_1 = 2_{270^\circ}, \quad z_2 = 4_{120^\circ}; \quad z_3 = 3_{315^\circ}$$

calcula:

a) $z_1 \cdot z_2$

b) $z_2 \cdot z_3$

c) $z_1 \cdot z_3$

d) $\frac{z_3}{z_1}$

e) $\frac{z_2}{z_1}$

f) $\frac{z_1 \cdot z_3}{z_2}$

g) z_1^2

h) z_2^3

i) z_3^4

a) $z_1 \cdot z_2 = 8_{30^\circ}$

b) $z_2 \cdot z_3 = 12_{75^\circ}$

c) $z_1 \cdot z_3 = 6_{225^\circ}$

d) $\frac{z_3}{z_1} = 1,5_{45^\circ}$

e) $\frac{z_2}{z_1} = 2_{-150^\circ} = 2_{210^\circ}$

f) $\frac{z_1 \cdot z_3}{z_2} = 1,5_{105^\circ}$

g) $z_1^2 = 4_{180^\circ}$

h) $z_2^3 = 64_{0^\circ}$

i) $z_3^4 = 81_{180^\circ}$

17 Expresa en forma polar y calcula:

a) $(-1 - i)^5$

b) $\sqrt[4]{1 - \sqrt{3}i}$

c) $\sqrt[6]{64}$

d) $\sqrt[3]{8i}$

e) $(-2\sqrt{3} + 2i)^6$

f) $(3 - 4i)^3$

a) $(-1 - i)^5 = (\sqrt{2}_{225^\circ})^5 = 4\sqrt{2}_{1125^\circ} = 4\sqrt{2}_{45^\circ} = 4\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 4 + 4i$

b) $\sqrt[4]{1 - \sqrt{3}i} = \sqrt[4]{2_{300^\circ}} = \sqrt[4]{2}_{(300^\circ + 360^\circ n)/4} = \sqrt[4]{2}_{75^\circ + 90^\circ n}; \quad n = 0, 1, 2, 3$

Las cuatro raíces son:

$$\sqrt[4]{2}_{75^\circ} \quad \sqrt[4]{2}_{165^\circ} \quad \sqrt[4]{2}_{255^\circ} \quad \sqrt[4]{2}_{345^\circ}$$

c) $\sqrt[4]{64} = \sqrt[4]{64_{0^\circ}} = \sqrt[4]{2^6}_{(360^\circ k)/4} = 2\sqrt{2}_{90^\circ k}; \quad k = 0, 1, 2, 3$

Las cuatro raíces son:

$$2\sqrt{2}_{0^\circ} = 2\sqrt{2} \quad 2\sqrt{2}_{90^\circ} = 2\sqrt{2}i \quad 2\sqrt{2}_{180^\circ} = -2\sqrt{2} \quad 2\sqrt{2}_{270^\circ} = -2\sqrt{2}i$$

d) $\sqrt[3]{8i} = \sqrt[3]{8_{90^\circ}} = 2_{(90^\circ + 360^\circ k)/3} = 2_{30^\circ + 120^\circ k}; \quad k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:

$$2_{30^\circ} = \sqrt{3} + i \quad 2_{150^\circ} = -\sqrt{3} + i \quad 2_{270^\circ} = -2i$$

e) $(-2\sqrt{3} + 2i)^6 = (4_{150^\circ})^6 = 4096_{900^\circ} = 4096_{180^\circ} = -4096$

f) $(3 - 4i)^3 = (5_{306^\circ 52'})^3 = 125_{920^\circ 36'} = 125_{200^\circ 36'}$

18 Calcula y representa gráficamente el resultado:

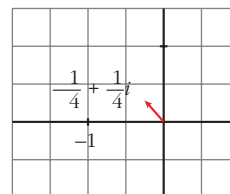
a) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^3$

b) $\sqrt[3]{\frac{1+i}{2-i}}$

$$a) \left(\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^3 = \left(\frac{\sqrt{2}_{315^\circ}}{2_{30^\circ}}\right)^3 = \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)_{285^\circ}\right)^3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)_{855^\circ} = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)_{135^\circ} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}(\cos 135^\circ + i \operatorname{sen} 135^\circ) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$$



$$b) \sqrt[3]{\frac{1+i}{2-i}} = \sqrt[3]{\frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}} = \sqrt[3]{\frac{1+3i}{5}} = \sqrt[3]{\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i} =$$

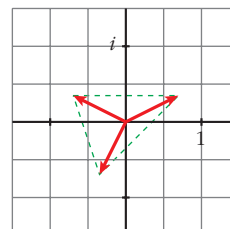
$$= \sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt{10}}{5}\right)_{71^\circ 34'}} = \left(\frac{\sqrt[6]{10}}{\sqrt[3]{5}}\right)_{(71^\circ 34' + 360^\circ k)/3} = \sqrt[6]{\frac{2}{5}}_{23^\circ 51' + 120^\circ k}; \quad k = 0, 1, 2$$

Las tres raíces son:

$$\sqrt[6]{\frac{2}{5}}_{23^\circ 51'} = 0,785 + 0,347i$$

$$\sqrt[6]{\frac{2}{5}}_{143^\circ 51'} = -0,693 + 0,56i$$

$$\sqrt[6]{\frac{2}{5}}_{263^\circ 51'} = -0,092 - 0,853i$$


19 Calcula y representa las soluciones:

a) $\sqrt[3]{4-4\sqrt{3}i}$

b) $\sqrt[4]{-16}$

c) $\sqrt[3]{8i}$

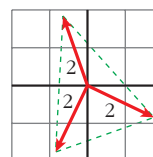
$$a) \sqrt[3]{4-4\sqrt{3}i} = \sqrt[3]{8_{300^\circ}} = 2_{(300^\circ + 360^\circ k)/3} = 2_{100^\circ + 120^\circ k}; \quad k = 0, 1, 2$$

Las tres raíces son:

$$2_{100^\circ} = -0,35 + 1,97i$$

$$2_{220^\circ} = -1,53 - 1,26i$$

$$2_{340^\circ} = 1,88 - 0,68i$$

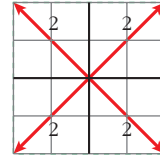


$$b) \sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16}_{180^\circ} = 2_{(180^\circ + 360^\circ k)/4} = 2_{45^\circ + 90^\circ k}; \quad k = 0, 1, 2, 3$$

Las cuatro raíces son:

$$2_{45^\circ} = \sqrt{2} + \sqrt{2}i \quad 2_{135^\circ} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

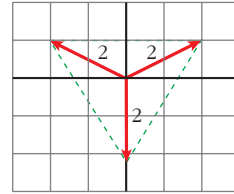
$$2_{225^\circ} = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i \quad 2_{315^\circ} = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$$



$$c) \sqrt[3]{8i} = \sqrt[3]{8}_{90^\circ} = 2_{(90^\circ + 360^\circ k)/3} = 2_{30^\circ + 120^\circ k}; \quad k = 0, 1, 2$$

Las tres raíces son:

$$2_{30^\circ} = \sqrt{3} + i \quad 2_{150^\circ} = -\sqrt{3} + i \quad 2_{270^\circ} = -2i$$



Página 163

20 Calcula pasando a forma polar:

$$a) (1 + i\sqrt{3})^5$$

$$b) (-1 - i\sqrt{3})^6 (\sqrt{3} - i)$$

$$c) \sqrt[4]{-2 + 2\sqrt{3}i}$$

$$d) \frac{8}{(1-i)^5}$$

$$e) \sqrt[6]{-64}$$

$$f) \sqrt{-1-i}$$

$$g) \sqrt[3]{-i}$$

$$h) \sqrt{\frac{2-2i}{-3+3i}}$$

$$a) (1 + i\sqrt{3})^5 = (2_{60^\circ})^5 = 32_{300^\circ} = 32(\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ) = \\ = 32\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 16 - 16\sqrt{3}i$$

$$b) (-1 - i\sqrt{3})^6 (\sqrt{3} - i) = (2_{240^\circ})^6 (2_{330^\circ}) = (64_{1440^\circ}) (2_{330^\circ}) = \\ = (64_{0^\circ}) (2_{330^\circ}) = 128_{330^\circ} = 128(\cos 330^\circ + i \sin 330^\circ) = \\ = 128\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{-1}{2}\right) = 64\sqrt{3} - 64i$$

$$c) \sqrt[4]{-2 + 2\sqrt{3}i} = \sqrt[4]{4}_{120^\circ} = \sqrt[4]{4}_{(120^\circ + 360^\circ k)/4} = \sqrt[4]{2^2}_{30^\circ + 90^\circ k} = \\ = \sqrt{2}_{30^\circ + 90^\circ k}; \quad k = 0, 1, 2, 3$$

Las cuatro raíces son:

$$\sqrt{2}_{30^\circ} = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \quad \sqrt{2}_{120^\circ} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i$$

$$\sqrt{2}_{210^\circ} = -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \quad \sqrt{2}_{300^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i$$

$$d) \frac{8}{(1-i)^5} = \frac{8_{0^\circ}}{(\sqrt{2}_{315^\circ})^5} = \frac{8_{0^\circ}}{4\sqrt{2}_{1575^\circ}} = \frac{8_{0^\circ}}{4\sqrt{2}_{135^\circ}} = \left(\frac{8}{4\sqrt{2}}\right)_{-135^\circ} = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)_{225^\circ} =$$

$$= \sqrt{2}_{225^\circ} = \sqrt{2}(\cos 225^\circ + i \sin 225^\circ) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -1 - i$$

$$e) \sqrt[6]{-64} = \sqrt[6]{64_{180^\circ}} = \sqrt[6]{2^6}_{(180^\circ + 360^\circ k)/6} = 2_{30^\circ + 60^\circ k}; \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

Las seis raíces son:

$$\begin{array}{lll} 2_{30^\circ} = \sqrt{3} + i & 2_{90^\circ} = 2i & 2_{150^\circ} = -\sqrt{3} + i \\ 2_{210^\circ} = -\sqrt{3} - i & 2_{270^\circ} = -2 & 2_{330^\circ} = \sqrt{3} - i \end{array}$$

$$f) \sqrt{-1-i} = \sqrt{\sqrt{2}_{225^\circ}} = \sqrt[4]{2}_{(225^\circ + 360^\circ k)/2} = \sqrt[4]{2}_{112^\circ 30' + 180^\circ k}; \quad k = 0, 1$$

Las dos raíces son:

$$\sqrt[4]{2}_{112^\circ 30'} = -0,46 + 1,1i \quad \sqrt[4]{2}_{292^\circ 30'} = 0,46 - 1,1i$$

$$g) \sqrt[3]{-i} = \sqrt[3]{1_{270^\circ}} = 1_{(270^\circ + 360^\circ k)/3} = 1_{90^\circ + 120^\circ k}; \quad k = 0, 1, 2$$

Las tres raíces son:

$$1_{90^\circ} = i \quad 1_{210^\circ} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \quad 1_{330^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$h) \sqrt{\frac{2-2i}{-3+3i}} = \sqrt{\frac{2\sqrt{2}_{315^\circ}}{3\sqrt{2}_{135^\circ}}} = \left(\frac{2}{3}\right)_{180^\circ} = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)_{(180^\circ + 360^\circ k)/2} =$$

$$= \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)_{90^\circ + 180^\circ k}; \quad k = 0, 1$$

Las dos raíces son:

$$\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)_{90^\circ} = \sqrt{\frac{2}{3}}i \quad \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)_{270^\circ} = -\sqrt{\frac{2}{3}}i$$

21 Expresa en forma polar z , su opuesto $-z$, y su conjugado \bar{z} en cada uno de estos casos:

a) $z = 1 - \sqrt{3}i$

b) $z = -2 - 2i$

c) $z = -2\sqrt{3} + 2i$

a) $z = 1 - \sqrt{3}i = 2_{300^\circ}; \quad -z = -1 + \sqrt{3}i = 2_{120^\circ}; \quad \bar{z} = 1 + \sqrt{3}i = 2_{60^\circ}$

b) $z = -2 - 2i = 2\sqrt{2}_{225^\circ}; \quad -z = 2 + 2i = 2\sqrt{2}_{45^\circ}; \quad \bar{z} = -2 + 2i = 2\sqrt{2}_{135^\circ}$

c) $z = -2\sqrt{3} + 2i = 4_{150^\circ}; \quad -z = 2\sqrt{3} - 2i = 4_{330^\circ}; \quad \bar{z} = -2\sqrt{3} - 2i = 4_{210^\circ}$

22 Representa los polígonos regulares que tienen por vértices los afijos de las siguientes raíces:

a) $\sqrt[5]{i}$

b) $\sqrt[6]{-1}$

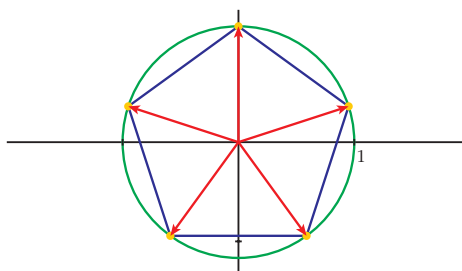
c) $\sqrt[4]{2\sqrt{3} + 2i}$

a) $\sqrt[5]{i} = \sqrt[5]{1_{90^\circ}} = 1_{(90^\circ + 360^\circ k)/5} = 1_{18^\circ + 72^\circ k}; k = 0, 1, 2, 3, 4$

Las cinco raíces son:

$$1_{18^\circ} \quad 1_{90^\circ} \quad 1_{162^\circ} \quad 1_{234^\circ} \quad 1_{306^\circ}$$

Representación del polígono (pentágono):

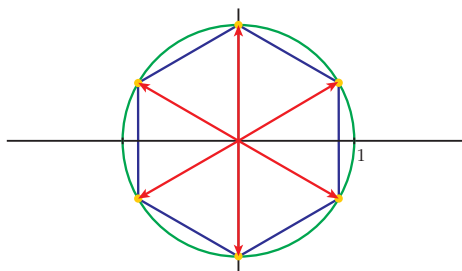


b) $\sqrt[6]{-1} = \sqrt[6]{1_{180^\circ}} = 1_{(180^\circ + 360^\circ k)/6} = 1_{30^\circ + 60^\circ k}; k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

Las seis raíces son:

$$1_{30^\circ} \quad 1_{90^\circ} \quad 1_{150^\circ} \quad 1_{210^\circ} \quad 1_{270^\circ} \quad 1_{330^\circ}$$

Representación del polígono (hexágono):

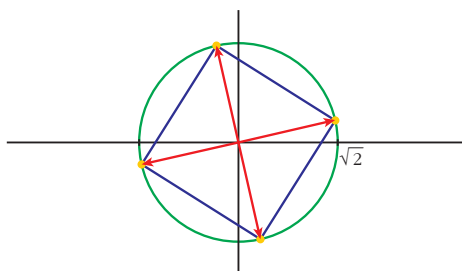


c) $\sqrt[4]{2\sqrt{3} + 2i} = \sqrt[4]{4_{30^\circ}} = \sqrt[4]{2^2}_{(30^\circ + 360^\circ k)/4} = \sqrt{2}_{7^\circ 30' + 90^\circ k}; k = 0, 1, 2, 3$

Las cuatro raíces son:

$$\sqrt{2}_{7^\circ 30'} \quad \sqrt{2}_{97^\circ 30'} \quad \sqrt{2}_{187^\circ 30'} \quad \sqrt{2}_{277^\circ 30'}$$

Representación del polígono (cuadrado):



Ecuaciones y sistemas en \mathbb{C}

23 Resuelve las siguientes ecuaciones y expresa las soluciones en forma binómica:

a) $z^2 + 4 = 0$

b) $z^2 + z + 4 = 0$

c) $z^2 + 3z + 7 = 0$

d) $z^2 - z + 1 = 0$

a) $z^2 + 4 = 0 \rightarrow z^2 = -4 \rightarrow z = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$

$z_1 = -2i, z_2 = 2i$

b) $z^2 + z + 4 = 0 \rightarrow z = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 16}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-15}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{15}i}{2}$

$z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2}i, z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2}i$

c) $z^2 + 3z + 7 = 0 \rightarrow z = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 28}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-19}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{19}i}{2}$

$z_1 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{19}}{2}i, z_2 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{19}}{2}i$

d) $z^2 - z + 1 = 0 \rightarrow z = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

$z_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

24 Resuelve las ecuaciones:

a) $z^5 + 32 = 0$

b) $iz^3 - 27 = 0$

c) $z^3 + 8i = 0$

d) $iz^4 + 4 = 0$

a) $z^5 + 32 = 0 \rightarrow z^5 = -32$

$z = \sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{32_{180^\circ}} = 2_{(180^\circ + 360^\circ k)/5} = 2_{36^\circ + 72^\circ k}; k = 0, 1, 2, 3, 4$

Las cinco raíces son:

$2_{36^\circ} \quad 2_{108^\circ} \quad 2_{180^\circ} \quad 2_{252^\circ} \quad 2_{324^\circ}$

b) $iz^3 - 27 = 0 \rightarrow z^3 + 27i = 0 \rightarrow z^3 = -27i$

$z = \sqrt[3]{-27i} = \sqrt[3]{27_{270^\circ}} = 3_{(270^\circ + 360^\circ k)/3} = 3_{90^\circ + 120^\circ k}; k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:

$3_{90^\circ} \quad 3_{210^\circ} \quad 3_{330^\circ}$

c) $z^3 + 8i = 0 \rightarrow z = \sqrt[3]{-8i} = \sqrt[3]{8_{270^\circ}} = 2_{(270^\circ + 360^\circ k)/3} = 2_{90^\circ + 120^\circ k}; k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:

$2_{90^\circ} = 2i \quad 2_{210^\circ} = -\sqrt{3} - i \quad 2_{330^\circ} = \sqrt{3} - i$

$$d) iz^4 + 4 = 0 \rightarrow z^4 - 4i = 0 \rightarrow z^4 = 4i$$

$$z = \sqrt[4]{4i} = \sqrt[4]{4_{90^\circ}} = \sqrt{2_{(90^\circ + 360^\circ k)/4}} = \sqrt{2_{22^\circ 30' + 90^\circ k}}; \quad k = 0, 1, 2, 3$$

Las cuatro raíces son:

$$\begin{aligned} \sqrt{2_{22^\circ 30'}} &= 1,3 + 0,5i & \sqrt{2_{112^\circ 30'}} &= -0,5 + 1,3i \\ \sqrt{2_{202^\circ 30'}} &= -1,3 - 0,5i & \sqrt{2_{292^\circ 30'}} &= 0,5 - 1,3i \end{aligned}$$

25 Resuelve las siguientes ecuaciones en \mathbb{C} :

a) $z^2 + 4i = 0$

b) $z^2 - 2z + 5 = 0$

c) $2z^2 + 10 = 0$

d) $z^4 + 13z^2 + 36 = 0$

a) $z^2 + 4i = 0 \rightarrow z^2 = -4i \rightarrow z = \sqrt{-4i} = \sqrt{4_{270^\circ}} \rightarrow z = 2_{(270^\circ + 360^\circ k)/2}; \quad k = 0, 1$

$$z_1 = 2_{135^\circ}, \quad z_2 = 2_{315^\circ}$$

b) $z^2 - 2z + 5 = 0 \rightarrow z = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$

$$z_1 = 1 - 2i, \quad z_2 = 1 + 2i$$

c) $2z^2 + 10 = 0 \rightarrow 2z^2 = -10 \rightarrow z^2 = -5 \rightarrow z = \pm \sqrt{5}i$

$$z_1 = -\sqrt{5}i, \quad z_2 = \sqrt{5}i$$

d) $z^4 + 13z^2 + 36 = 0$

$$z^2 = t$$

$$t^2 + 13t + 36 = 0$$

$$t = \frac{-13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{-13 \pm 5}{2} \begin{cases} t = -4 \\ t = -9 \end{cases}$$

$$z^2 = -4 \rightarrow z = \pm 2i$$

$$z^2 = -9 \rightarrow z = \pm 3i$$

Las soluciones son: $2i = 2_{90^\circ}$; $-2i = 2_{270^\circ}$; $3i = 3_{90^\circ}$; $-3i = 3_{270^\circ}$

26 Obtén las cuatro soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $z^4 - 1 = 0$

b) $z^4 + 16 = 0$

c) $z^4 - 8z = 0$

a) $z^4 - 1 = 0 \rightarrow z^4 = 1 \rightarrow z = \sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{1_{0^\circ}} = 1_{360^\circ k/4} = 1_{90^\circ k}; \quad k = 0, 1, 2, 3$

Las cuatro raíces son:

$$1_{0^\circ} = 1 \quad 1_{90^\circ} = i \quad 1_{180^\circ} = -1 \quad 1_{270^\circ} = -i$$

b) $z^4 + 16 = 0 \rightarrow z^4 = -16 \rightarrow z = \sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16_{180^\circ}} = 2_{(180^\circ + 360^\circ k)/4} =$

$$= 2_{45^\circ + 90^\circ k}; \quad k = 0, 1, 2, 3$$

Las cuatro raíces son:

$$2_{45^\circ} = \sqrt{2} + \sqrt{2}i \quad 2_{135^\circ} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

$$2_{225^\circ} = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i \quad 2_{315^\circ} = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

$$c) z^4 - 8z = 0 \rightarrow z(z^3 - 8) = 0 \begin{cases} z = 0 \\ z = \sqrt[3]{8} \end{cases}$$

$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{8_0^\circ} = 2_{(360^\circ k)/3} = 2_{120^\circ k}; \quad k = 0, 1, 2$$

Las soluciones de la ecuación son:

$$0 \quad 2_{0^\circ} = 2 \quad 2_{120^\circ} = -1 + \sqrt{3}i \quad 2_{240^\circ} = -1 - \sqrt{3}i$$

27 Halla los números complejos z y w que verifican cada uno de estos sistemas de ecuaciones:

$$a) \begin{cases} z + w = -1 + 2i \\ z - w = -3 + 4i \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} z + 2w = 2 + i \\ iz + w = 5 + 5i \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} z + w = -1 + 2i \\ z - w = -3 + 4i \end{cases} \quad \text{Sumando miembro a miembro:}$$

$$2z = -4 + 6i \rightarrow z = -2 + 3i$$

$$w = (-1 + 2i) - (-2 + 3i) = 1 - i$$

$$\text{Solución: } z = -2 + 3i; \quad w = 1 - i$$

$$b) \begin{cases} z + 2w = 2 + i \\ iz + w = 5 + 5i \end{cases} \quad \text{Multiplicamos por } -2 \text{ la 2.ª ecuación y sumamos:}$$

$$\begin{cases} z + 2w = 2 + i \\ -2iz - 2w = -10 - 10i \end{cases} \quad (1 - 2i)z = -8 - 9i \rightarrow z = \frac{-8 - 9i}{1 - 2i} = 2 - 5i$$

$$w = \frac{2 + i - (2 - 5i)}{2} = \frac{6i}{2} = 3i$$

$$\text{Solución: } z = 2 - 5i; \quad w = 3i$$

PARA RESOLVER

28 Calcula m para que el número complejo $3 - mi$ tenga el mismo módulo que $2\sqrt{5} + \sqrt{5}i$.

$$\begin{cases} |3 - mi| = \sqrt{9 + m^2} \\ |2\sqrt{5} + \sqrt{5}i| = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{9 + m^2} = 5 \rightarrow 9 + m^2 = 25 \rightarrow m^2 = 16 \\ m = \pm 4 \end{cases}$$

Hay dos posibilidades: $m = -4$ y $m = 4$

- 29** Halla dos números complejos tales que su cociente sea 3, la suma de sus argumentos $\pi/3$, y la suma de sus módulos 8.

• Llámalos r_α y s_β y escribe las ecuaciones que los relacionan:

$$\frac{r_\alpha}{s_\beta} = 3_{0^\circ} \quad (0^\circ \text{ es el argumento del cociente, } \alpha - \beta = 0^\circ); \quad r + s = 8 \quad y \quad \alpha + \beta = \frac{\pi}{3}.$$

$$\frac{r}{s} = 3$$

$$r + s = 8$$

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$$

$$\alpha - \beta = 0^\circ$$

Hallamos sus módulos:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{r}{s} = 3 \\ r + s = 8 \end{array} \right\} \begin{array}{l} r = 3s \\ 3s + s = 8; \quad 4s = 8; \quad s = 2; \quad r = 6 \end{array}$$

Hallamos sus argumentos:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha + \beta = \frac{\pi}{3} \\ \alpha - \beta = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \alpha = \beta; \quad 2\beta = \frac{\pi}{3}; \quad \beta = \frac{\pi}{6}; \quad \alpha = \frac{\pi}{6} \end{array}$$

Los números serán: $6_{\pi/6}$ y $2_{\pi/6}$

- 30** El producto de dos números complejos es 2_{90° y el cubo del primero dividido por el otro es $(1/2)_{0^\circ}$. Hállalos.

Llamamos a los números: $z = r_\alpha$ y $w = s_\beta$

$$r_\alpha \cdot s_\beta = 2_{90^\circ} \quad \left\langle \begin{array}{l} r \cdot s = 2 \\ \alpha + \beta = 90^\circ \end{array} \right.$$

$$\frac{(r_\alpha)^3}{s_\beta} = \left(\frac{1}{2}\right)_{0^\circ} \quad \left\langle \begin{array}{l} r^3/s = \frac{1}{2} \\ 3\alpha - \beta = 90^\circ \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} r \cdot s = 2 \\ \frac{r^3}{s} = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} r \cdot s = 2 \\ s = 2r^3 \end{array} \right\} r \cdot 2r^3 = 2 \rightarrow r^4 = 1 \rightarrow r = \left\langle \begin{array}{l} 1 \\ -1 \text{ (no vale)} \end{array} \right. \rightarrow s = 2 \cdot 1^3 = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha + \beta = 90^\circ \\ 3\alpha - \beta = 90^\circ \end{array} \right\} \rightarrow 4\alpha = 90^\circ + 360^\circ k \rightarrow$$

$$\rightarrow \alpha = \frac{90^\circ + 360^\circ k}{4}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$$\beta = 90^\circ - \alpha$$

Hay cuatro soluciones:

$$z_1 = 1_{22^\circ 30'} \rightarrow w_1 = 2z_1^3 = 2 \cdot 1_{67^\circ 30'} = 2_{67^\circ 30'}$$

$$z_2 = 1_{112^\circ 30'} \rightarrow w_2 = 2_{337^\circ 30'}$$

$$z_3 = 1_{202^\circ 30'} \rightarrow w_3 = 2_{607^\circ 30'} = 2_{247^\circ 30'}$$

$$z_4 = 1_{292^\circ 30'} \rightarrow w_4 = 2_{877^\circ 30'} = 2_{157^\circ 30'}$$

31 El producto de dos números complejos es -8 y el primero es igual al cuadrado del segundo. Calcúlalos.

$$\left. \begin{aligned} z \cdot w &= -8 \\ z &= w^2 \end{aligned} \right\} w^3 = -8$$

$$w = \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8_{180^\circ}} = 2_{(180^\circ + 360^\circ k)/3} = 2_{60^\circ + 120^\circ k}; \quad k = 0, 1, 2$$

Hay tres soluciones:

$$w_1 = 2_{60^\circ} \rightarrow z_1 = 4_{120^\circ}$$

$$w_2 = 2_{180^\circ} \rightarrow z_2 = 4_{0^\circ} = 4$$

$$w_3 = 2_{300^\circ} \rightarrow z_3 = 4_{600^\circ} = 4_{240^\circ}$$

32 De dos números complejos sabemos que:

- Tienen el mismo módulo, igual a 2.
- Sus argumentos suman $17\pi/6$.
- El primero es opuesto del segundo.

¿Cuáles son esos números?

Llamamos a los números: $z = r_\alpha$ y $w = s_\beta$

Tenemos que:

$$\left. \begin{aligned} r &= s = 2 \\ \alpha + \beta &= \frac{17\pi}{6} \end{aligned} \right\} \rightarrow 2\alpha = \frac{17\pi}{6} + \pi \rightarrow \alpha = \frac{23}{12}\pi \rightarrow \beta = \frac{23}{12}\pi - \pi = \frac{11}{12}\pi$$

Por tanto, los números son: $1_{23\pi/12}$ y $2_{11\pi/12}$; o bien $1_{11\pi/12}$ y $2_{23\pi/12}$

33 Calcula $\cos 75^\circ$ y $\sen 75^\circ$ mediante el producto $1_{30^\circ} \cdot 1_{45^\circ}$.

$$1_{30^\circ} \cdot 1_{45^\circ} = 1_{75^\circ} = \cos 75^\circ + i \sen 75^\circ$$

$$\begin{aligned} 1_{30^\circ} \cdot 1_{45^\circ} &= (\cos 30^\circ + i \sen 30^\circ) (\cos 45^\circ + i \sen 45^\circ) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = \\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}i + \frac{\sqrt{2}}{4}i - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}i \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \quad \sen 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

- 34** Halla las razones trigonométricas de 15° conociendo las de 45° y las de 30° mediante el cociente $1_{45^\circ} : 1_{30^\circ}$.

$$1_{45^\circ} : 1_{30^\circ} = 1_{15^\circ} = \cos 15^\circ + i \operatorname{sen} 15^\circ$$

$$\begin{aligned} \frac{1_{45^\circ}}{1_{30^\circ}} &= \frac{\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ}{\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ} = \frac{\sqrt{2}/2 + i(\sqrt{2}/2)}{\sqrt{3}/2 + i(1/2)} = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{\sqrt{3} + i} = \\ &= \frac{(\sqrt{2} + i\sqrt{2})(\sqrt{3} - i)}{(\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} - i)} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}i + \sqrt{6}i + \sqrt{2}}{3 + 1} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}i \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \quad \operatorname{sen} 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

- 35** ¿Para qué valores de x es imaginario puro el cociente $\frac{x-4i}{x+i}$?

$$\frac{x-4i}{x+i} = \frac{(x-4i)(x-i)}{(x+i)(x-i)} = \frac{x^2-4}{x^2+1} + \frac{-5x}{x^2+1}i$$

Para que sea imaginario puro, ha de ser:

$$\frac{x^2-4}{x^2+1} = 0 \rightarrow x^2-4=0 \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \end{cases}$$

- 36** Halla, en función de x , el módulo de $z = \frac{1+xi}{1-xi}$.

Demuestra que $|z| = 1$ para cualquier valor de x .

$$|z| = \left| \frac{1+xi}{1-xi} \right| = \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = 1$$

O bien:

$$z = \frac{1+xi}{1-xi} = \frac{(1+xi)(1+xi)}{(1-xi)(1+xi)} = \frac{1-x^2+2xi}{1+x^2} = \frac{1-x^2}{1+x^2} + \frac{2x}{1+x^2}i$$

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2 + \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1+x^4-2x^2+4x^2}{(1+x^2)^2}} = \sqrt{\frac{x^4+2x^2+1}{(1+x^2)^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{(1+x^2)^2}{(1+x^2)^2}} = \sqrt{1} = 1 \end{aligned}$$

- 37** Calcula x para que el número complejo que obtenemos al dividir $\frac{x+2i}{4-3i}$ esté representado en la bisectriz del primer cuadrante.

➡ Para que $a+bi$ esté en la bisectriz del primer cuadrante, debe ser $a=b$.

$$\frac{x+2i}{4-3i} = \frac{(x+2i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)} = \frac{4x+3xi+8i-6}{16+9} = \frac{4x-6}{25} + \frac{3x+8}{25}i$$

Ha de ser:

$$\frac{4x-6}{25} = \frac{3x+8}{25} \rightarrow 4x-6 = 3x+8 \Rightarrow x = 14$$

Página 164

- 38** Halla dos números complejos conjugados cuya suma es 8 y la suma de sus módulos es 10.

$$\left. \begin{array}{l} z + \bar{z} = 8 \\ |z| + |\bar{z}| = 10 \end{array} \right\} \text{ Como } |z| = |\bar{z}| \Rightarrow |z| = 5$$

Si llamamos:

$$z = a + bi \rightarrow \bar{z} = a - bi$$

$$z + \bar{z} = a + bi + a - bi = 2a = 8 \rightarrow a = 4$$

$$|z| = |\bar{z}| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + b^2} = 5 \rightarrow 16 + b^2 = 25 \rightarrow \\ \rightarrow b^2 = 9 \rightarrow b = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

Hay dos soluciones:

$$z_1 = 4 + 3i \rightarrow \bar{z}_1 = 4 - 3i$$

$$z_2 = 4 - 3i \rightarrow \bar{z}_2 = 4 + 3i$$

- 39** La suma de dos números complejos es $3 + i$. La parte real del primero es 2, y el producto de ambos es un número real. Hállalos.

Llamamos $z = a + bi$ y $w = c + di$

Tenemos que:

$$\left\{ \begin{array}{l} z + w = 3 + i \\ a = 2 \rightarrow c = 1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} a + c = 3 \\ b + d = 1 \end{array} \right.$$

$$z \cdot w = (2 + bi)(1 + di) = 2 + 2di + bi + bdi^2 = (2 - bd) + (2d + b)i$$

Para que $z \cdot w$ sea un número real, ha de ser $2d + b = 0$.

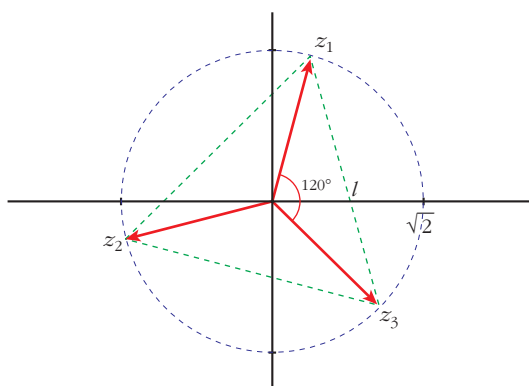
$$\text{Por tanto, } \left\{ \begin{array}{l} b + d = 1 \\ b + 2d = 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} d = -1 \\ b = 2 \end{array} \right. \quad \text{Los números son: } z = 2 + 2i; w = 1 - i$$

- 40** Representa gráficamente los resultados que obtengas al hallar $\sqrt[3]{-2-2i}$ y calcula el lado del triángulo que se forma al unir esos tres puntos.

$$\sqrt[3]{-2-2i} = \sqrt[3]{\sqrt{8}_{225^\circ}} = \sqrt{2}_{(225^\circ + 360^\circ k)/3} = \sqrt{2}_{75^\circ + 120^\circ k}$$

Las tres raíces son:

$$z_1 = \sqrt{2}_{75^\circ} \quad z_2 = \sqrt{2}_{195^\circ} \quad z_3 = \sqrt{2}_{315^\circ}$$



Para hallar la longitud del lado, aplicamos el teorema del coseno:

$$l^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 120^\circ = 2 + 2 - 4\left(-\frac{1}{2}\right) = 4 + 2 = 6$$

$$l = \sqrt{6}$$

41 Los afijos de las raíces cúbicas de $8i$ son los vértices de un triángulo equilátero. Compruébalo.

¿Determinan el mismo triángulo los afijos de $\sqrt[3]{-8i}$, $\sqrt[3]{8}$ o $\sqrt[3]{-8}$? Representa gráficamente esos cuatro triángulos que has obtenido.

- $\sqrt[3]{8i} = \sqrt[3]{8_{90^\circ}} = 2_{(90^\circ + 360^\circ k)/3} = 2_{30^\circ + 120^\circ k}; \quad k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:

$$z_1 = 2_{30^\circ} \quad z_2 = 2_{150^\circ} \quad z_3 = 2_{270^\circ}$$

Al tener el mismo módulo y formar entre ellos un ángulo de 120° , el triángulo que determinan es equilátero.

- $\sqrt[3]{-8i} = \sqrt[3]{8_{270^\circ}} = 2_{(270^\circ + 360^\circ k)/3} = 2_{90^\circ + 120^\circ k}; \quad k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:

$$z_1 = 2_{90^\circ} \quad z_2 = 2_{210^\circ} \quad z_3 = 2_{330^\circ}$$

- $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{8_{0^\circ}} = 2_{360^\circ k/3} = 2_{120^\circ k}; \quad k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:

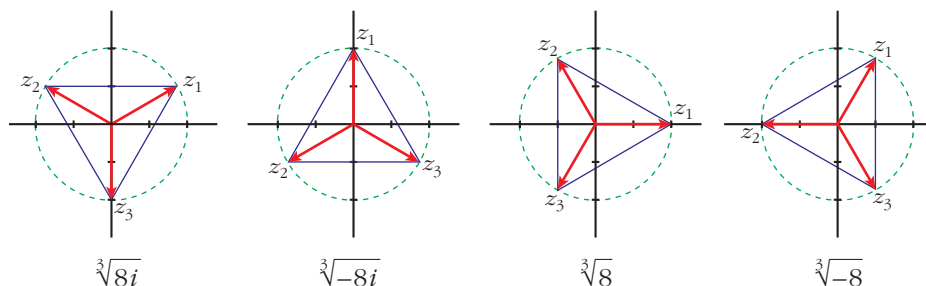
$$z_1 = 2_{0^\circ} \quad z_2 = 2_{120^\circ} \quad z_3 = 2_{240^\circ}$$

- $\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8_{180^\circ}} = 2_{(180^\circ + 360^\circ k)/3} = 2_{60^\circ + 120^\circ k}; \quad k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:

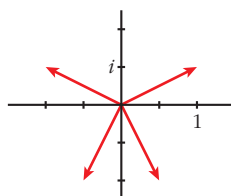
$$z_1 = 2_{60^\circ} \quad z_2 = 2_{180^\circ} \quad z_3 = 2_{300^\circ}$$

• Representación:

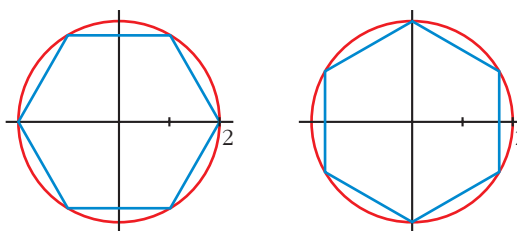


42 ¿Pueden ser $z_1 = 2 + i$, $z_2 = -2 + i$, $z_3 = -1 - 2i$ y $z_4 = 1 - 2i$, las raíces de un número complejo? Justifica tu respuesta.

No. Si fueran las cuatro raíces cuartas de un número complejo, formarían entre cada dos de ellas un ángulo de 90° ; y ni siquiera forman el mismo ángulo, como vemos en la representación gráfica:



43 Halla los números complejos que corresponden a los vértices de estos hexágonos:



• 1.^{er} hexágono:

$$z_1 = 2_{0^\circ} = 2$$

$$z_2 = 2_{60^\circ} = 1 + \sqrt{3}i$$

$$z_3 = 2_{120^\circ} = -1 + \sqrt{3}i$$

$$z_4 = 2_{180^\circ} = -2$$

$$z_5 = 2_{240^\circ} = -1 - \sqrt{3}i$$

$$z_6 = 2_{300^\circ} = 1 - \sqrt{3}i$$

• 2.^o hexágono:

$$z_1 = 2_{30^\circ} = \sqrt{3} + i$$

$$z_2 = 2_{90^\circ} = 2i$$

$$z_3 = 2_{150^\circ} = -\sqrt{3} + i$$

$$z_4 = 2_{210^\circ} = -\sqrt{3} - i$$

$$z_5 = 2_{270^\circ} = -2i$$

$$z_6 = 2_{330^\circ} = \sqrt{3} - i$$

- 44** ¿Pueden ser las raíces de un número complejo, z , los números 2_{28° , 2_{100° , 2_{172° , 2_{244° y 2_{316° ? En caso afirmativo, halla z .

☛ Comprueba si el ángulo que forman cada dos de ellas es el de un pentágono regular.

$$28^\circ + 72^\circ = 100^\circ \quad 100^\circ + 72^\circ = 172^\circ$$

$$172^\circ + 72^\circ = 244^\circ \quad 244^\circ + 72^\circ = 316^\circ$$

Sí son las raíces quintas de un número complejo. Lo hallamos elevando a la quinta cualquiera de ellas:

$$z = (2_{28^\circ})^5 = 32_{140^\circ}$$

- 45** El número complejo 3_{40° es vértice de un pentágono regular. Halla los otros vértices y el número complejo cuyas raíces quintas son esos vértices.

☛ Para obtener los otros vértices puedes multiplicar cada uno por 1_{72° .

Los otros vértices serán:

$$3_{112^\circ} \quad 3_{184^\circ} \quad 3_{256^\circ} \quad 3_{328^\circ}$$

El número será:

$$z = (3_{40^\circ})^5 = 243$$

- 46** Una de las raíces cúbicas de un número complejo z es $1 + i$. Halla z y las otras raíces cúbicas.

☛ Ten en cuenta que si $\sqrt[3]{z} = 1 + i \rightarrow z = (1 + i)^3$.

$$1 + i = \sqrt{2}_{45^\circ}$$

Las otras raíces cúbicas son:

$$\sqrt{2}_{45^\circ + 120^\circ} = \sqrt{2}_{165^\circ} \quad \sqrt{2}_{165^\circ + 120^\circ} = \sqrt{2}_{285^\circ}$$

Hallamos z :

$$\begin{aligned} z &= (1 + i)^3 = (\sqrt{2}_{45^\circ})^3 = \sqrt{8}_{135^\circ} = \sqrt{8} (\cos 135^\circ + i \operatorname{sen} 135^\circ) = \\ &= \sqrt{8} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -2 + 2i \end{aligned}$$

- 47** Escribe una ecuación de segundo grado que tenga por soluciones $1 + i$ y $1 - i$.

☛ Mira el ejercicio resuelto 1 de la página 151.

$$\begin{aligned} [x - (1 + i)] [x - (1 - i)] &= x^2 - (1 - i)x - (1 + i)x + (1 + i)(1 - i) = \\ &= x^2 - (1 - i + 1 + i)x + (1 - i^2) = \\ &= x^2 - 2x + 2 = 0 \end{aligned}$$

48 Escribe una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean:

a) $5i$ y $-5i$

b) $2 - 3i$ y $2 + 3i$

a) $(x - 5i)(x + 5i) = 0$

$$x^2 - 25i^2 = 0$$

$$x^2 + 25 = 0$$

b) $[x - (2 - 3i)][x - (2 + 3i)] = [(x - 2) + 3i][(x - 2) - 3i] =$
 $= (x - 2)^2 - (3i)^2 = x^2 - 4x + 4 - 9i^2 =$
 $= x^2 - 4x + 13 = 0$

49 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} z + w = -1 + 2i \\ iz + (1 - i)w = 1 + 3i \end{cases}$

b) $\begin{cases} z - w = 5 - 3i \\ (2 + i)z + iw = 3 - 3i \end{cases}$

a) Multiplicamos por $-i$ la primera ecuación:

$$\begin{cases} -iz - iw = i + 2 \\ iz + (1 - i)w = 1 + 3i \end{cases} \quad \text{Sumamos miembro a miembro:}$$

$$-iw + (1 - i)w = i + 2 + 1 + 3i \rightarrow (1 - 2i)w = 3 + 4i$$

$$w = \frac{3 + 4i}{1 - 2i} = \frac{(3 + 4i)(1 + 2i)}{1^2 - 2i^2} = \frac{-5 + 10i}{5} = -1 + 2i$$

$$z = -1 + 2i - w = -1 + 2i + 1 - 2i = 0$$

Solución: $z = 0$; $w = -1 + 2i$

b) Multiplicamos por i la primera ecuación:

$$\begin{cases} zi - wi = 5i + 3 \\ (2 + i)z + wi = 3 - 3i \end{cases} \quad \text{Sumamos miembro a miembro:}$$

$$zi + (2 + i)z = 5i + 3 + 3 - 3i \rightarrow (2 + 2i)z = 6 + 2i$$

$$z = \frac{6 + 2i}{2 + 2i} = \frac{(6 + 2i)(2 - 2i)}{4 - 4i^2} = \frac{16 - 8i}{8} = 2 - i$$

$$w = z - 5 + 3i = 2 - i - 5 + 3i = -3 + 2i$$

Solución: $z = 2 - i$; $w = -3 + 2i$

Interpretación gráfica de igualdades y desigualdades entre complejos

50 Representa.

a) $\operatorname{Re} z = 2$

b) $\operatorname{Im} z = 1$

c) $\operatorname{Re} z \leq 0$

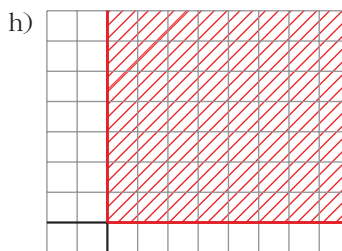
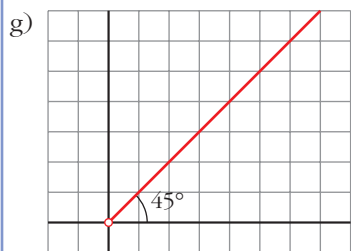
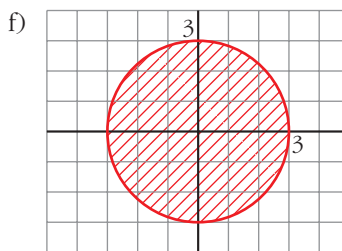
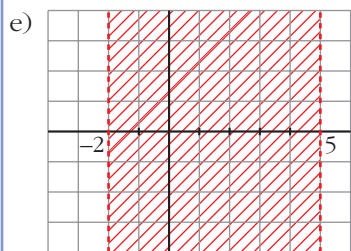
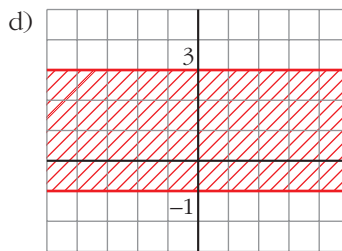
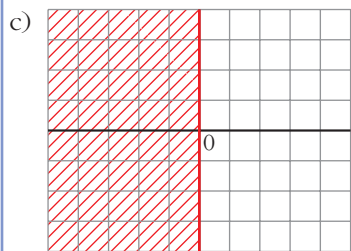
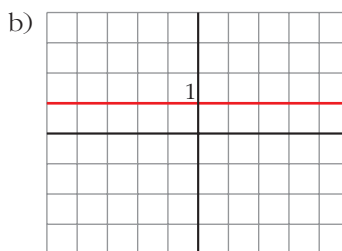
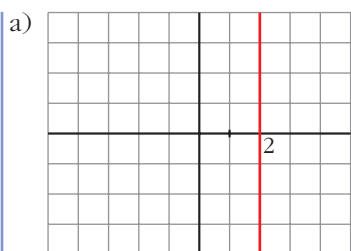
d) $-1 \leq \operatorname{Im} z \leq 3$

e) $-2 < \operatorname{Re} z < 5$

f) $|z| \leq 3$

g) $\operatorname{Arg} z = 45^\circ$

h) $0^\circ \leq \operatorname{Arg} z \leq 90^\circ$



51 Representa los números complejos z tales que $z + \bar{z} = -3$.

✎ *Escribe z en forma binómica, súmale su conjugado y representa la condición que obtienes.*

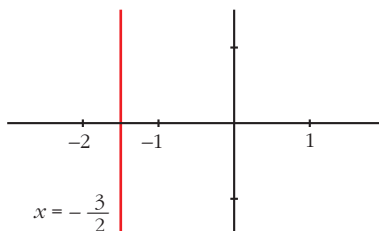
Llamamos $z = x + iy$

Entonces: $\bar{z} = x - iy$

Así:

$$z + \bar{z} = x + iy + x - iy = 2x = -3 \rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

Representación:



52 Representa los números complejos que verifican:

a) $\bar{z} = -z$

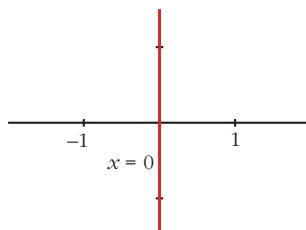
b) $|z + \bar{z}| = 3$

c) $|z - \bar{z}| = 4$

a) $z = x + iy \rightarrow \bar{z} = x - iy$

$\bar{z} = -z \rightarrow x - iy = -x - iy \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$ (es el eje imaginario)

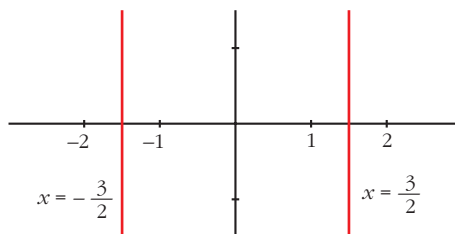
Representación:



b) $z + \bar{z} = x + iy + x - iy = 2x$

$$|z + \bar{z}| = |2x| = 3 \begin{cases} 2x = 3 \rightarrow x = 3/2 \\ 2x = -3 \rightarrow x = -3/2 \end{cases}$$

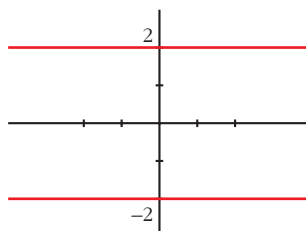
Representación:



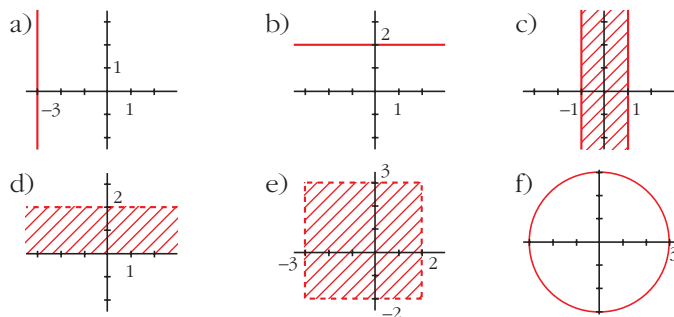
c) $z - \bar{z} = x + iy - x + iy = 2yi$

$$|z - \bar{z}| = |2yi| = |2y| = 4 \begin{cases} 2y = 4 \rightarrow y = 2 \\ 2y = -4 \rightarrow y = -2 \end{cases}$$

Representación:



53 Escribe las condiciones que deben cumplir los números complejos cuya representación gráfica es la siguiente:



En a), b) y f) es una igualdad. En c) y d), una desigualdad. En e), dos desigualdades.

- $$\begin{array}{ll} \text{a) } \operatorname{Re} z = -3 & \text{b) } \operatorname{Im} z = 2 \\ \text{c) } -1 \leq \operatorname{Re} z \leq 1 & \text{d) } 0 \leq \operatorname{Im} z < 2 \\ \text{e) } \begin{cases} -3 < \operatorname{Re} z < 2 \\ -2 < \operatorname{Im} z < 3 \end{cases} & \text{f) } |z| = 3 \end{array}$$

Página 165

CUESTIONES TEÓRICAS

54 ¿Se puede decir que un número complejo es real si su argumento es 0?

No, también son reales los números con argumento 180° (los negativos).

55 Si $z = r_\alpha$, ¿qué relación tienen con z los números $r_{\alpha + 180^\circ}$ y $r_{360^\circ - \alpha}$?

$$r_{\alpha + 180^\circ} = -z \text{ (opuesto de } z)$$

$$r_{360^\circ - \alpha} = \bar{z} \text{ (conjugado de } z\text{)}$$

56 Comprueba que:

$$\text{a) } \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$$

b) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

c) $\overline{kz} = k \overline{z}$, con $k \in \mathbb{R}$

$$z = a + bi = r_{\alpha} \rightarrow \bar{z} = a - bi = r_{360^{\circ} - \alpha}$$

$$w = c + di = r'_{\beta} \rightarrow \bar{w} = c - di = r'_{360^\circ - \beta}$$

$$\text{a) } z + w = (a + c) + (b + d)i \rightarrow \overline{z + w} = (a + c) - (b + d)i$$

$$\overline{z} + \overline{w} = a - bi + c - di = (a + c) - (b + d)i = \overline{z + w}$$

$$b) x \cdot w = (r \cdot r')_{\alpha + \beta} \rightarrow \overline{z \cdot w} = (r \cdot r')_{360^\circ - (\alpha + \beta)}$$

$$\overline{z} \cdot \overline{w} = (r \cdot r')_{360^\circ - \alpha + 360^\circ - \beta} = (r \cdot r')_{360^\circ - (\alpha + \beta)} = \overline{z \cdot w}$$

$$c) kz = ka + kbi \rightarrow \overline{kz} = ka - kbi$$

$$k \overline{z} = ka - kbi = \overline{kz}$$

57 Demuestra que:

$$\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1_{0^\circ}}{r_\alpha} = \left(\frac{1}{r} \right)_{-\alpha} = \left(\frac{1}{r} \right)_{360^\circ - \alpha} \rightarrow \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{r} = \frac{1}{|z|}$$

58 El producto de dos números complejos imaginarios, ¿puede ser real?

Acláralo con un ejemplo.

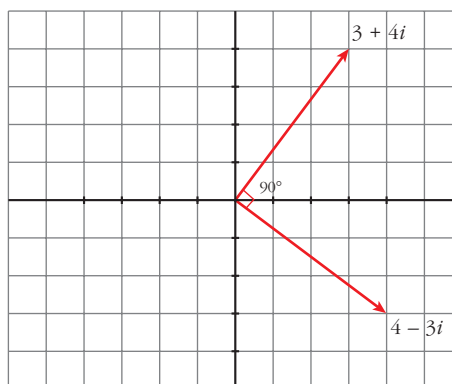
Sí. Por ejemplo:

$$z = i, w = i$$

$$z \cdot w = i \cdot i = i^2 = -1 \in \mathbb{R}$$

59 Representa el número complejo $z = 4 - 3i$. Multiplícalo por i y comprueba que el resultado que obtienes es el mismo que si aplicas a z un giro de 90° .

$$iz = 4i - 3i^2 = 3 + 4i$$



60 ¿Qué relación existe entre el argumento de un complejo y el de su opuesto?

Se diferencian en 180° . Si el argumento del número es α , el de su opuesto es:

$$180^\circ + \alpha$$

- 61** ¿Qué condición debe cumplir un número complejo $z = a + bi$ para que $\bar{z} = \frac{1}{z}$?

• Halla $\frac{1}{z}$, e iguala a $a - bi$.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = a - bi$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{a}{a^2 + b^2} &= a \\ \frac{-b}{a^2 + b^2} &= -b \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \frac{a}{a} &= a^2 + b^2 \rightarrow a^2 + b^2 = 1 \text{ (módulo 1)} \\ \text{Ha de tener módulo 1.} \end{aligned}$$

PARA PROFUNDIZAR

- 62** Un pentágono regular con centro en el origen de coordenadas tiene uno de sus vértices en el punto $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Halla los otros vértices y la longitud de su lado.

El punto $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ corresponde al afijo del número complejo $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i = 2_{45^\circ}$.

Para hallar los otros vértices, multiplicamos z por 1_{72° :

$$z_2 = 2_{117^\circ} = -0,91 + 1,78i$$

$$z_3 = 2_{189^\circ} = -1,97 - 0,31i$$

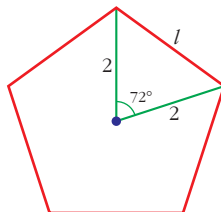
$$z_4 = 2_{261^\circ} = -0,31 - 1,97i$$

$$z_5 = 2_{333^\circ} = 1,78 - 0,91i$$

Los otros tres vértices serán:

$$(-0,91; 1,78) \quad (-1,97; -0,31) \quad (-0,31; -1,97) \quad (1,78; -0,91)$$

Hallamos la longitud del lado aplicando el teorema del coseno:



$$l^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot \cos 72^\circ$$

$$l^2 = 4 + 4 - 4 \cdot 0,31$$

$$l^2 = 8 - 1,24$$

$$l^2 = 6,76$$

$$l = 2,6 \text{ unidades}$$

- 63** Si el producto de dos números complejos es -8 y dividiendo el cubo de uno de ellos entre el otro obtenemos de resultado 2, ¿cuánto valen el módulo y el argumento de cada uno?

$$\left. \begin{aligned} z &= r_{\alpha} \\ w &= r'_{\beta} \\ -8 &= 8_{180^{\circ}} \\ 2 &= 2_{0^{\circ}} \end{aligned} \right\} r_{\alpha} \cdot r'_{\beta} = (r \cdot r')_{\alpha + \beta} = 8_{180^{\circ}} \rightarrow \begin{cases} r \cdot r' = 8 \\ \alpha + \beta = 180^{\circ} \end{cases}$$

$$\frac{(r_{\alpha})^3}{r'_{\beta}} = \frac{r^3_{3\alpha}}{r'_{\beta}} = \left(\frac{r^3}{r'} \right)_{3\alpha - \beta} = 2_{0^{\circ}} \rightarrow \begin{cases} \frac{r^3}{r'} = 2 \\ 3\alpha - \beta = 0^{\circ} \end{cases}$$

Así:

$$\left. \begin{aligned} r \cdot r' &= 8 \\ r^3 &= 2r' \end{aligned} \right\} \begin{aligned} r' &= \frac{8}{r} \\ r' &= \frac{r^3}{2} \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} \frac{8}{r} &= \frac{r^3}{2} \rightarrow 16 = r^4 \rightarrow \begin{cases} r = 2 \\ r' = 4 \end{cases} \end{aligned} \right.$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha + \beta &= 180^{\circ} \\ 3\alpha &= \beta \end{aligned} \right\} \alpha + 3\alpha = 180^{\circ} \rightarrow 4\alpha = 180^{\circ} \rightarrow \begin{cases} \alpha = 45^{\circ} \\ \beta = 135^{\circ} \end{cases}$$

Por tanto: $z = 2_{45^{\circ}}$, $w = 4_{135^{\circ}}$

- 64** Calcula el inverso de los números complejos siguientes y representa gráficamente el resultado que obtengas:

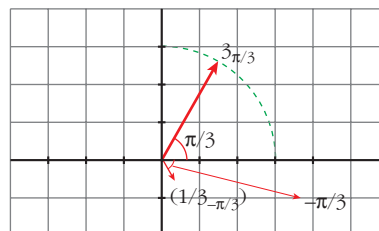
a) $3_{\pi/3}$

b) $2i$

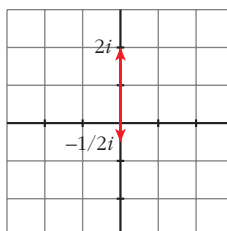
c) $-1 + i$

¿Qué relación existe entre el módulo y el argumento de un número complejo y de su inverso?

a) $\frac{1}{3_{\pi/3}} = \frac{1_{0^{\circ}}}{3_{\pi/3}} = \left(\frac{1}{3} \right)_{-\pi/3} = \left(\frac{1}{3} \right)_{5\pi/3}$

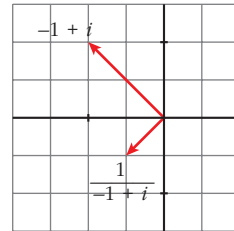


b) $\frac{1}{2i} = \frac{-i}{2} = \frac{-1}{2}i = \left(\frac{1}{2} \right)_{270^{\circ}}$



c) $-1 + i = \sqrt{2} \angle 135^\circ$

$$\frac{1}{-1 + i} = \frac{1 \angle 0^\circ}{\sqrt{2} \angle 135^\circ} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \angle -135^\circ = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \angle 225^\circ = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$



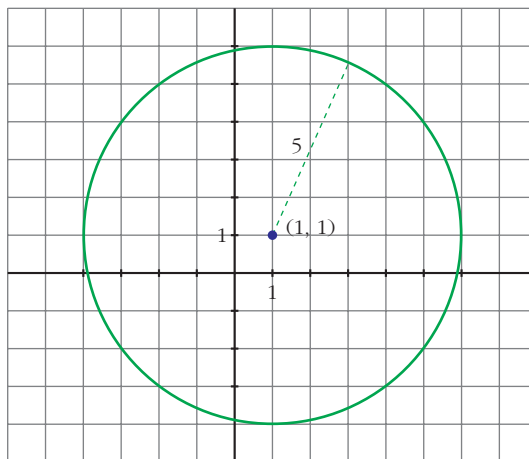
Si $z = r \angle \alpha$, entonces $\frac{1}{z} = \left(\frac{1}{r} \right) \angle 360^\circ - \alpha$

65 Representa gráficamente las igualdades siguientes. ¿Qué figura se determina en cada caso?

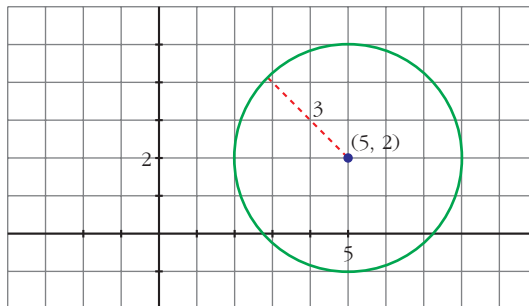
a) $|z - (1 + i)| = 5$

b) $|z - (5 + 2i)| = 3$

a) Circunferencia con centro en (1, 1) y radio 5.



b) Circunferencia de centro en (5, 2) y radio 3.



66 Escribe la condición que verifican todos los números complejos cuyos afijos estén en la circunferencia de centro (1, 1) y radio 3.

$|z - (1 + i)| = 3$

AUTOEVALUACIÓN

1. Efectúa.

$$\frac{(3-2i)^2 - (1+i)(2-i)}{-3+i}$$

$$\begin{aligned}\frac{(3-2i)^2 - (1+i)(2-i)}{-3+i} &= \frac{9 + 4i^2 - 12i - (2-i+2i-i^2)}{-3+i} = \frac{5-12i-3-i}{-3+i} = \\ &= \frac{(2-13i)(-3-i)}{(-3+i)(-3-i)} = \frac{-6+13i^2-2i+39i}{9-i^2} = \\ &= \frac{-19+37i}{10} = -\frac{19}{10} + \frac{37}{10}i\end{aligned}$$

2. Calcula z y expresa los resultados en forma binómica.

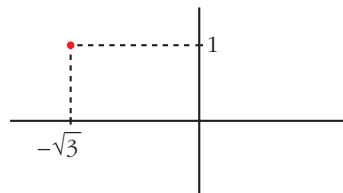
$$\sqrt[4]{z} = \frac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}i}$$

$$z = \left(\frac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}i} \right)^4$$

Pasamos numerador y denominador a forma polar:

$$\begin{aligned}-\sqrt{3}+i &\begin{cases} r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2 \\ \operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \alpha = 150^\circ \end{cases}\end{aligned}$$

$$\sqrt{2}i \rightarrow \sqrt{2}_{90^\circ}$$



$$z = \left(\frac{2_{150^\circ}}{\sqrt{2}_{90^\circ}} \right)^4 = (\sqrt{2}_{60^\circ})^4 = 4_{240^\circ} \rightarrow z = 4 (\cos 240^\circ + i \operatorname{sen} 240^\circ)$$

$$z = 4 \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -2 - 2\sqrt{3}i$$

3. Halla a y b para que se verifique la igualdad:

$$5(a-2i) = (3+i)(b-i)$$

$$5a - 10i = 3b - i^2 - 3i + bi \rightarrow 5a - 10i = 3b + 1 + (-3 + b)i$$

$$\text{Igualando las componentes } \begin{cases} 5a = 3b + 1 \\ -10 = -3 + b \end{cases} \rightarrow b = -7, a = -4$$

4. Resuelve la ecuación: $z^2 - 10z + 29 = 0$

$$z = \frac{10 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{10 \pm 4i}{2} \begin{cases} z_1 = 5 + 2i \\ z_2 = 5 - 2i \end{cases}$$

Soluciones: $z_1 = 5 + 2i$, $z_2 = 5 - 2i$

5. Calcula el valor que debe tomar x para que el módulo de $\frac{x+2i}{1-i}$ sea igual a 2.

$$\frac{x+2i}{1-i} = \frac{(x+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{x+2i^2+xi+2i}{1-i^2} = \frac{x-2+(x+2)i}{1+1} = \frac{x-2}{2} + \frac{x+2}{2}i$$

$$\text{Módulo} = \sqrt{\left(\frac{x-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x+2}{2}\right)^2} = 2 \rightarrow \sqrt{\frac{x^2+4}{2}} = 2 \rightarrow \frac{x^2+4}{2} = 4 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 + 4 = 8 \rightarrow x^2 = 4 \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases} \quad \text{Hay dos soluciones: } x_1 = 2, x_2 = -2$$

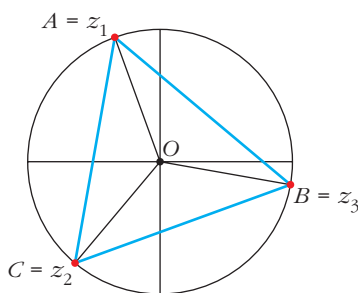
6. Halla el lado del triángulo cuyos vértices son los afijos de las raíces cúbicas de $4\sqrt{3} - 4i$.

$$z = \sqrt[3]{4\sqrt{3} - 4i}$$

Expresamos $4\sqrt{3} - 4i$ en forma polar:

$$\left. \begin{aligned} r &= \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + (-4)^2} = 8 \\ \operatorname{tg} \alpha &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \alpha = 330^\circ \end{aligned} \right\} 4\sqrt{3} - 4i = 8_{330^\circ}$$

$$z = \sqrt[3]{8_{330^\circ}} = \sqrt[3]{8_{\frac{330^\circ + 360^\circ k}{3}}} \begin{cases} z_1 = 2_{110^\circ} \\ z_2 = 2_{230^\circ} \\ z_3 = 2_{350^\circ} \end{cases}$$



En el triángulo AOB conocemos dos lados, $\overline{OA} = \overline{OB} = 2$, y el ángulo comprendido, 120° . Aplicando el teorema del coseno, obtenemos el lado del triángulo, \overline{AB} :

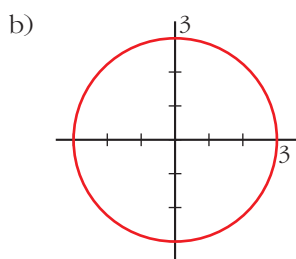
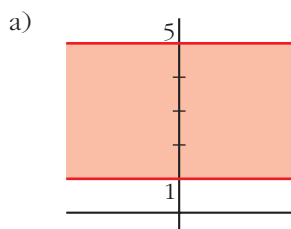
$$\overline{AB}^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cos 120^\circ = 12 \rightarrow \overline{AB} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \text{ u}$$

7. Representa gráficamente.

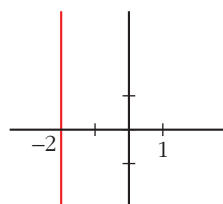
a) $1 \leq \operatorname{Im} z \leq 5$

b) $|z| = 3$

c) $z + \bar{z} = -4$



c) $a + bi + a - bi = -4 \rightarrow 2a = -4 \rightarrow a = -2$

**8. Halla dos números complejos tales que su cociente sea 2_{150° y su producto 18_{90° .**

$$\frac{r_\alpha}{s_\beta} = 2_{150^\circ} \rightarrow \frac{r}{s} = 2; \alpha - \beta = 150^\circ$$

$$r_\alpha \cdot s_\beta = 18_{90^\circ} \rightarrow r \cdot s = 18; \alpha + \beta = 90^\circ$$

Resolvemos los sistemas:

$$\begin{cases} r/s = 2 \\ r \cdot s = 18 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha - \beta = 150^\circ \\ \alpha + \beta = 90^\circ \end{cases}$$

Obtenemos:

$$\begin{cases} r = 6 \\ s = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = 120^\circ \\ \beta = -30^\circ = 330^\circ \end{cases}$$

Los números son 6_{120° y 3_{330° . Otra posible solución es: 6_{300° y 3_{150° .

9. Demuestra que $|z \cdot \bar{z}| = |z|^2$.

$$\left. \begin{array}{l} z = a + bi \\ \bar{z} = a - bi \end{array} \right\} z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \rightarrow \left. \begin{array}{l} |z \cdot \bar{z}| = \sqrt{(a^2 + b^2)^2} = a^2 + b^2 \\ |z|^2 = (\sqrt{a^2 + b^2})^2 = a^2 + b^2 \end{array} \right\} |z \cdot \bar{z}| = |z|^2$$

10. Calcula $\cos 120^\circ$ y $\sen 120^\circ$ a partir del producto $1_{90^\circ} \cdot 1_{30^\circ}$.

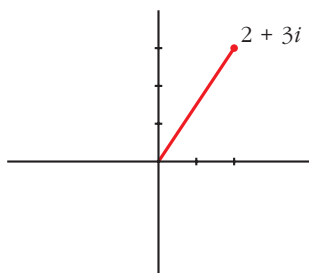
$$1_{90^\circ} \cdot 1_{30^\circ} = 1(\cos 90^\circ + i \sen 90^\circ) \cdot 1(\cos 30^\circ + i \sen 30^\circ) =$$

$$= i \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$1_{90^\circ} \cdot 1_{30^\circ} = 1_{120^\circ} = 1(\cos 120^\circ + i \sen 120^\circ) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \rightarrow$$

$$\rightarrow \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}; \sen 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

11. Halla el número complejo z que se obtiene al transformar el complejo $2 + 3i$ mediante un giro de 30° con centro en el origen.



Multiplicamos por $1_{30^\circ} = 1(\cos 30^\circ + i \sen 30^\circ)$.

$$z = (2 + 3i) \cdot 1_{30^\circ} = (2 + 3i) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right)$$

$$z = \sqrt{3} + \frac{3}{2} i^2 + i + \frac{3\sqrt{3}}{2} i$$

$$z = \frac{2\sqrt{3} - 3}{2} + \frac{2 + 3\sqrt{3}}{2} i$$