

## Unidad 1: Números reales.

### 1.- Números racionales e irracionales

**Números racionales:** Son aquellos que se pueden escribir como una fracción.

1. Números enteros  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Los números naturales: } 1, 2, 3, \dots \\ \text{El número } 0 \\ \text{Los enteros negativos} \end{array} \right\}$
2. Números decimales exactos y periódicos.

#### Ejercicios de repaso

1.- Calcula la fracción irreducible:

$$a) \frac{5}{200} \quad b) \frac{-1080}{432} \quad c) \frac{26}{130} \quad d) \frac{-702}{1053}$$

2.- Indica cuáles de las siguientes fracciones son irreducibles:

$$\frac{3}{15} \quad \frac{15}{18} \quad \frac{10}{13} \quad \frac{9}{6} \quad \frac{12}{5} \quad \frac{18}{7} \quad \frac{15}{12} \quad \frac{2}{8}$$

3.- Halla  $x$  para que las fracciones sean equivalentes:

$$a) \frac{3}{5} = \frac{6}{x} = \frac{9}{x} = \frac{21}{x} \quad b) \frac{-5}{2} = \frac{x}{8} = \frac{10}{x} = \frac{25}{x}$$

4.- ¿Puedes escribir una fracción equivalente a  $\frac{2}{3}$  cuyo denominador sea 10? ¿Por qué?

5.- Realiza las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned} a) 2 \cdot \frac{3}{5} - \frac{4}{3} \div \frac{3}{4} \quad & b) 9 - \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{3} + \frac{2}{5} \quad c) \left(\frac{6}{5}\right)^2 - \left(1 - \frac{2}{5}\right) \\ d) \left(\frac{5}{6} - \frac{4}{5}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad & e) \left(\frac{5}{2} + \frac{2}{5}\right)^{-1} \div \left(\frac{7}{3}\right)^{-1} - \left(\frac{4}{3}\right)^2 \\ f) \frac{\frac{1}{4} - \frac{3}{5}}{\frac{7}{10} - \frac{3}{4}} \quad & g) \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{-3}{5}\right)^{-1} - \left(\frac{17}{8} - 2\right)^{-2} \end{aligned}$$

6.- Ordena de menor a mayor, reduciendo a común denominador:

$$\frac{-7}{3} \quad \frac{5}{4} \quad \frac{-6}{5} \quad \frac{7}{6}$$

7.- Expresa cada decimal en forma de fracción y calcula:

$$a) 12,\hat{6} + 7,\hat{3} \quad b) 3,7\hat{6} \cdot 4,\hat{8} \quad c) 1,25 : 2,2\hat{5}$$

**Números irracionales:** Son los que no se pueden expresar como fracción. Su expresión decimal es ilimitada no periódica. ( $\sqrt{n}$  con  $n$  un número natural no cuadrado perfecto,  $\pi$ , ...)

## 2.- Números Reales:

Es el conjunto de números formado por los números racionales e irracionales. Se representa por **R**.

La recta numérica en la que se representan todos los números reales se llama **recta real**.

### Ejercicios de repaso

8.- Representa en la recta real.

$$a)\sqrt{2} \quad b)\sqrt{10} \quad c)\sqrt{3} \quad d)\sqrt{18}$$

9.- Ordena de menor a mayor:

$$4 \quad \frac{3}{2} \quad \frac{-1}{2} \quad -5 \quad \sqrt{5} \quad -\sqrt{2} \quad 0 \quad 3,1415 \dots$$

10.- Ordena y representa los números.

$$\frac{-3}{2} \quad 0,5 \quad \sqrt{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad 2$$

Los subconjuntos más importantes de la recta real son los **intervalos**, que se corresponden con los puntos de un segmento o una semirrecta en la recta real.

Cada intervalo viene determinado por sus extremos, siendo dos extremos en el caso de los segmentos y un extremo en el caso de las semirrectas.

Según incluyan o no a los puntos extremos, los intervalos pueden ser **abiertos**, **semiabiertos** o **cerrados**.

11.- Describe y representa los siguientes intervalos.

a)  $(0,10)$  b)  $(3,7]$  c)  $(-\infty, -2)$  d)  $[2, 5]$  e)  $[5, 10)$  f)  $[-4, +\infty)$  g)  $(-\infty, 6]$  h)  $(100, +\infty)$

12.- Escribe el intervalo que corresponde a estas desigualdades.

a)  $1 < x < 3$  b)  $9 < x \leq 7$  c)  $5 \leq x < 9$  d)  $10 \leq x \leq 12$

13.- Escribe el intervalo que corresponde a:

a)  $x \leq -2$  b)  $x < 5$  c)  $x > -3$  d)  $x \geq 7$  e)  $x < -9$  f)  $x \geq -6$

14.- Representa los intervalos  $(0,5)$  y  $(-2, 3)$  en la misma recta, y señala el intervalo intersección.

15.- Representa en la recta los siguientes conjuntos:

a)  $[-3,0) \cup (-1,3]$  b)  $(-3,1) \cap [0,3]$  c)  $|x| > 2$  d)  $|x| < 1$

16.- Representa en la recta real los conjuntos  $A = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 4\}$  y  $B = (-3,4)$ . ¿Cuál es el conjunto  $A \cup B$ ? ¿Y  $A \cap B$ ?

### **3.- Radicales. Potencias de exponente fraccionario.**

$\sqrt[n]{a}$ , en caso de existir, es un número  $x$  que elevado a  $n$  (índice) da como resultado  $a$  (radicando). Es decir:  $x^n = a$

Ejemplo:  $\sqrt[4]{16} = 2$  ya que  $2^4 = 16$

Recuerda que:

- Si el índice es par sólo existe raíz si el radicando es positivo o cero. En este caso, la raíz tiene dos soluciones que son opuestas ( $\sqrt[4]{16} = \pm 2$ )
- Si el índice es impar siempre tiene solución que es única y del mismo signo que el radicando ( $\sqrt[3]{-64} = -4$ )

#### **Ejercicios de repaso**

17.- Decide si son ciertas o no las siguientes igualdades. Razona la respuesta.

a)  $\sqrt[4]{-16} = -2$  b)  $\sqrt[8]{256} = \pm 4$  c)  $\sqrt[3]{1000000} = \pm 1000$  d)  $\sqrt[5]{32} = \pm 2$

18.- Calcula el valor numérico, si existe, de los siguientes radicales.

a)  $\sqrt[4]{16}$  b)  $\sqrt[3]{-8}$  c)  $\sqrt[4]{-10000}$  d)  $\sqrt[5]{243}$

Las **potencias de exponente fraccionario** se definen como un radical:

$$a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x}$$

Por ejemplo:

$$5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$$

19.- Transforma los radicales en potencias, y viceversa:

$$a) 3^{\frac{1}{4}} \quad b) 5^{\frac{2}{3}} \quad c) 2^{\frac{1}{6}} \quad d) 7^{\frac{3}{5}} \quad e) 10^{\frac{2}{7}} \quad f) \sqrt[4]{5^7}$$

Dos **radicales** son **equivalentes** si tienen el mismo valor numérico.

$$\sqrt[4]{16} = \sqrt{4} = 2$$

**Reducir dos o más radicales a índice común** consiste en transformarlos en radicales equivalentes con igual índice (mcm de los índices).

$$\sqrt{2} = \sqrt[12]{2^6} = \sqrt[12]{64}$$

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[12]{2^4} = \sqrt[12]{16}$$

$$\sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{3^3} = \sqrt[12]{27}$$

El reducir a común índice permite comprobar si dos radicales son o no equivalentes y ordenar dos o más radicales.

Por ejemplo: a)  $\sqrt[4]{16} = \sqrt{4}$ , pues  $\sqrt[4]{4^2} = \sqrt{4}$  (radicales equivalentes)

$$b) \sqrt[3]{2} < \sqrt[4]{3} < \sqrt{2} \text{ pues } \sqrt[12]{16} < \sqrt[12]{27} < \sqrt[12]{64}$$

20.- Reduce a índice común los siguientes radicales:

$$a) \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[5]{5} \quad b) \sqrt[4]{4} \text{ y } \sqrt[3]{7}$$

21.- Indica si son equivalentes o no los siguientes radicales.

$$a) \sqrt[4]{3^6} \text{ y } \sqrt{3^3} \quad b) \sqrt[5]{2^{10}} \text{ y } \sqrt{2} \quad c) \sqrt[4]{3^6} \text{ y } \sqrt{6} \quad d) \sqrt[4]{5^{10}} \text{ y } \sqrt{5^4}$$

22.- Ordena de mayor a menor, reduciendo a índice común.

$$a) \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[5]{4} \text{ y } \sqrt[6]{6} \quad b) \sqrt[4]{4} \text{ y } \sqrt[5]{5} \quad c) \sqrt[5]{2}, \sqrt[3]{7} \text{ y } \sqrt[4]{9}$$

**Simplificar radicales** consiste obtener el radical más simple equivalente al dado. Para ello se **extraen** de la raíz todos los **factores** posibles.

$$\sqrt[4]{64} = \sqrt[4]{2^6} = \sqrt{2^3} = 2^1 \sqrt{2^1} = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt[5]{128} = \sqrt[5]{2^7} = 2^1 \sqrt[5]{2^2} = 2\sqrt[5]{4}$$

$$\sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2} = \text{dividiendo entre dos el índice y el exponente} = \sqrt{2}$$

23.- Extrae los factores que puedas de la raíz.

$$a) \sqrt{8} \quad b) \sqrt{18} \quad c) \sqrt{50} \quad d) \sqrt{98} \quad e) \sqrt{12} \quad f) \sqrt{75} \quad g) \sqrt[3]{1000} \quad h) \sqrt[3]{40}$$

24.- Extrae factores de los radicales.

$$a) \sqrt[3]{8a^5} \quad b) \sqrt[4]{16a^7} \quad c) \sqrt{2^6 a^4 b^8} \quad d) \sqrt[4]{a^6 b^5 c^9} \quad e) \sqrt[5]{a^6 b^{10}}$$

25.- Simplifica los siguientes radicales.

$$a) \sqrt{27} \quad b) \sqrt[3]{16} \quad c) \sqrt[3]{54} \quad d) \sqrt[4]{32} \quad e) \sqrt{75} \quad f) \sqrt[5]{128} \quad g) \sqrt[6]{27} \quad h) \sqrt[8]{625}$$

Los **factores** que están fuera de la raíz se pueden **introducir dentro** de ésta elevándolos al índice de la raíz.

$$6ab\sqrt{3} = \sqrt{6^2 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot 3} = \sqrt{108 \cdot a^2 \cdot b^2}$$

$$2a\sqrt[3]{2ab^2} = \sqrt[3]{2^3 \cdot a^3 \cdot 2ab^2} = \sqrt[3]{16a^4b^2}$$

26.- Introduce los factores bajo el radical.

$$a) 2\sqrt[3]{5} \quad b) 4\sqrt[4]{20} \quad c) 3\sqrt[5]{15} \quad d) \frac{1}{2} \sqrt[4]{\frac{1}{2}} \quad e) 2\sqrt[3]{7} \quad f) 5\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$$

## Operaciones con radicales

- **Suma o resta de radicales.** Para poder sumar y/o restar radicales, estos deben tener el mismo índice e idéntico radicando (los radicales que cumplen esto se llaman radicales semejantes).

$$b\sqrt[n]{a} + c\sqrt[n]{a} = (b + c)\sqrt[n]{a}$$

$$a) \ 3\sqrt[3]{3} - 4\sqrt[3]{3} + 9\sqrt[3]{3} = 8\sqrt[3]{3}$$

$$b) \ \sqrt{24} - 3\sqrt{6} + \sqrt{54} + 5 = \sqrt{3 \cdot 2^3} - 3\sqrt{2 \cdot 3} + \sqrt{3^3 \cdot 2} + 5 = \\ 2\sqrt{6} - 3\sqrt{6} + 3\sqrt{6} + 5 = 2\sqrt{6} + 5$$

- **Multiplicación o división de radicales.** Para multiplicar y/o dividir radicales, estos deben tener el mismo índice. Si los radicales no tienen el mismo índice, se reducen a índice común y después se opera.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{25} = \sqrt[6]{2^3} \cdot \sqrt[6]{2^2} \cdot \sqrt[6]{25^2} = \sqrt[6]{2^3 \cdot 2^2 \cdot 5^4} = \sqrt[6]{1250}$$

- **Potencia de un radical y raíz de un radical.**

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^{n \cdot m}}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

$$a) \ (2\sqrt[3]{5})^4 = 2^4 \cdot \sqrt[3]{5^4} = 16 \cdot 5\sqrt[3]{5} = 80\sqrt[3]{5}$$

$$b) \ \sqrt[4]{2\sqrt[3]{3}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{2^3 \cdot 3}} = \sqrt[12]{24}$$

27.- Expresa mediante un solo radical.

$$a) \sqrt[5]{3\sqrt{5}} \quad b) \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}} \quad c) \sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}} \quad d) \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}} \quad e) \sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} \quad f) \frac{1}{\sqrt{\sqrt{5}}}$$

28.- Efectúa estas operaciones.

$$a) \sqrt{20} - 3\sqrt{125} + 2\sqrt{45} \quad b) 7\sqrt[3]{81} - 2\sqrt[6]{3^2} + \frac{\sqrt[3]{3}}{5}$$

29.- Opera y simplifica.

$$a) 4\sqrt{27} \cdot 5\sqrt{6} \quad b) \left(\frac{\sqrt[6]{32}}{\sqrt{8}}\right)^3 \quad c) \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3} \quad d) \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{3}}$$

30.- Opera y simplifica.

$$a) (3\sqrt{2} - 5)(4\sqrt{2} - 3) \quad c) (2 + \sqrt{3})^2 - (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})$$

$$b) (\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \quad d) (3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5}) + (2 - 4\sqrt{5})(2 + 4\sqrt{5})$$

31.- Halla el resultado.

$$a) \sqrt{7 - 2\sqrt{6}} \cdot \sqrt{7 + 2\sqrt{6}} \quad b) \sqrt[3]{5\sqrt{3} - 1} \cdot \sqrt[3]{5\sqrt{3} + 1}$$

32.- Opera y simplifica.

$$a) \sqrt{2} + \sqrt{8} - \sqrt{18} + \sqrt{32} \quad b) \sqrt{24} + 7\sqrt{6} - 2\sqrt{486} \quad c) \sqrt[3]{128} - 2\sqrt[3]{32}$$

$$d) \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[3]{128} \quad e) \sqrt{7} \cdot \sqrt[3]{7} \quad f) \frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{3}} \quad g) \frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt{3}}$$

La **racionalización** consiste en transformar “fracciones” que tengan radicales en el denominador en otras equivalentes que no los tengan. Por ejemplo:

$$\frac{6}{\sqrt[7]{3^2}} = \frac{6 \cdot \sqrt[7]{3^5}}{\sqrt[7]{3^2} \cdot \sqrt[7]{3^5}} = \frac{6\sqrt[7]{3^5}}{\sqrt[7]{3^7}} = \frac{6\sqrt[7]{3^5}}{3} = 2\sqrt[7]{3^5}$$

$$\frac{4}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} = \frac{4 \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{5})}{(\sqrt{3} + \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{5})} = \frac{4 \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{5})}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{4 \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{5})}{-2}$$

$$= -2 \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{5})$$

33.- Racionaliza y simplifica.

$$a) \frac{6\sqrt{6} - 6}{\sqrt{6}} \quad b) \frac{-5}{2\sqrt{5}} \quad c) \frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \quad d) \frac{5\sqrt{3} - 4}{\sqrt[5]{3^2}} \quad e) \frac{-6}{2\sqrt[4]{7}}$$

34.- Elimina las raíces del denominador.

a)  $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$       d)  $\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-\sqrt{5}}$

b)  $\frac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$       e)  $\frac{7}{\sqrt{11}-3}$

c)  $\frac{-5}{\sqrt{3}-2}$       f)  $\frac{-5}{\sqrt{6}+\sqrt{7}}$

Para resolver operaciones entre fracciones con radicales lo que se suele hacer es:

1º Se racionaliza cada una de las fracciones con radicales en el denominador.

2º Se opera con las fracciones racionalizadas.

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt{5}-1} - \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} &= \text{racionalizamos cada fracción} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} - \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{1} \\ &= \text{ahora operamos y da como resultado} = \frac{1-\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

35.- Realiza estas operaciones.

a)  $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$       b)  $\frac{1}{\sqrt[9]{6}} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt[3]{2}}$

36.- Efectúa las operaciones.

a)  $\frac{1}{\sqrt{5}+1} - \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$       b)  $\frac{1}{\sqrt[9]{3}} - \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$



## 4.- LOS LOGARITMOS.

Dados dos números reales positivos  $a$  y  $b$  ( $b \neq 1$ ), el **logaritmo en base  $b$  de  $a$**  es el **exponente  $x$**  al que hay que elevar la base  $b$  para que el resultado sea  $a$ .

$$\log_b a = x \rightarrow b^x = a$$

Ejemplos:

$$a) \log_3 27 = 3 \quad \text{porque} \quad 3^3 = 27$$

$$b) \log_7 7 = 1 \quad \text{porque} \quad 7^1 = 7$$

$$c) \log_2 32 = 5 \quad \text{porque} \quad 2^5 = 32$$

$$d) \log_{\frac{1}{2}} 8 = -3 \quad \text{porque} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$$

Cuando los logaritmos son en base 10 se llaman **logaritmos decimales**, y no se escribe la base.

$$\log 100 = 2 \rightarrow 10^2 = 100$$

Ejemplos:

$$a) \log 1000 = 3 \quad \text{porque} \quad 10^3 = 1000$$

$$b) \log 0,1 = -1 \quad \text{porque} \quad 10^{-1} = 0,1$$

La calculadora científica nos permite calcular logaritmos decimales con la tecla **log**

Si la base es el número  $e = 2,7182\dots$ , se llaman **logaritmos neperianos** o logaritmos naturales, y se escribe

$$\ln a$$

Ejemplos:

$$a) \ln e^3 = 3$$

$$b) \ln 1 = 0$$

La calculadora científica nos permite obtener logaritmos naturales o neperianos usando la tecla **ln**

Se puede considerar que el logaritmo es la operación inversa de la exponencial.

$$\log_b a = x \leftrightarrow b^x = a$$

37.- Calcula, mediante la definición estos logaritmos.

a)  $\log_2 8$  b)  $\log_3 81$  c)  $\log 10000$  d)  $\log 0,001$  e)  $\ln e^{33}$  f)  $\ln e^{-4}$  g)  $\log_4 16$  h)  $\log_4 0,25$

38.- Halla, mediante la definición, los siguientes logaritmos.

a)  $\log_3 243$  b)  $\log_9 81$  c)  $\log 100000$  d)  $\log 0,00001$  e)  $\ln e^2$  f)  $\ln e^{-14}$  g)  $\log_7 343$  h)  $\log_4 0,0625$

## Propiedades de los logaritmos

- El logaritmo de 1 es siempre 0, y el logaritmo de la base es 1.

$$\log_b 1 = 0 \quad \log_b b = 1$$

- El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores.

$$\log_b (a \cdot c) = \log_b a + \log_b c$$

- El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador.

$$\log_b \left( \frac{a}{c} \right) = \log_b a - \log_b c$$

- El logaritmo de una potencia es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la base de la potencia.

$$\log_b a^c = c \log_b a$$

- Cambio de base en los logaritmos.

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

Esta última propiedad nos permite calcular cualquier logaritmo conociendo solo los logaritmos decimales o neperianos. Por ejemplo:

$$\log_3 81 = \frac{\log 81}{\log 3} = \frac{\ln 81}{\ln 3} = 4$$

39.- Sabiendo que  $\log_3 2 = 0,63$ ; halla  $\log_3 24$  mediante las propiedades de los logaritmos (no puedes hacer uso de la calculadora).

40.- Halla el resultado de estas expresiones, mediante las propiedades de los logaritmos.

$$a) 2\log_4 16 + \log_2 32 - 3\log_7 49 =$$

$$b) \log_2 8 + \log_3 27 + \log_5 125 =$$

$$c) \log_5 625 - \log_9 81 + \log_8 64 =$$

41.- Determina, utilizando las propiedades y la calculadora.

$$a) \log_5 36^2$$

$$b) \log_2 \sqrt{31}$$

$$c) \log_6 100$$

$$d) \log_4 31^5$$

42.- Calcula el valor de  $x$ .

$$a) \log_3 x = 5 \quad b) \log_5 x = 3 \quad c) \log_2 x = -1 \quad d) \log_{\frac{2}{3}} x = 4$$

$$e) \log_3(x-2) = 5 \quad f) \log_3(x+2) = 3 \quad g) \log_2(2-x) = -1 \quad h) \log_3(x+3) = 4$$

43.- Halla cuánto vale  $x$ .

$$a) \log_x 3 = -1 \quad b) \log_x 5 = 2 \quad c) \log_x 3 = -2 \quad d) \log_x 2 = 5$$

44.- Calcula el valor de  $x$ .

$$a) \log_3 9^x = 2 \quad b) \log 2^x = \frac{3}{2} \quad c) \ln 3^x = -1 \quad d) \log_2 4^{x+4} = -2$$

$$e) \log_3 9^{x+3} = 3 \quad f) \log 2^{\frac{x}{2}} = \frac{3}{2} \quad g) \ln 3^{x+6} = 3 \quad h) \log_3 27^{3x+4} = -2$$

45.- Determina el valor de  $x$ .

$$a) 8^x = 1024 \quad b) 3^{x^2} = 27 \quad c) 3^{x^2-6} = 27 \quad d) 10^{x-1} = 10^3$$

$$e) 8^{x-2} = 1024 \quad e) (3^x)^2 = 27 \quad f) 3^{x^2} + 18 = 27 \quad g) 2^{x^2-2x+1} = 1$$

## Soluciones

$$1.- a) \frac{1}{40} \quad b) \frac{-45}{18} \quad c) \frac{1}{5} \quad d) \frac{-2}{3}$$

$$2.- \frac{10}{13} \quad \frac{12}{5} \quad \frac{18}{7}$$

$$3.- a) \frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{9}{15} = \frac{21}{35}$$

$$b) \frac{-5}{2} = \frac{-20}{8} = \frac{10}{-4} = \frac{25}{-10}$$

$$5.- a) \frac{-26}{45} \quad b) \frac{529}{60} \quad c) \frac{21}{25} \quad d) \frac{5401}{4} \quad e) \frac{-42}{63} \quad f) 7 \quad g) \frac{-9488}{147}$$

$$6.- \frac{-7}{3} < \frac{-6}{5} < \frac{7}{6} < \frac{5}{4}$$

$$7.- a) 20 \quad b) \frac{2486}{135} \quad c) \frac{225}{406}$$

$$9.- -5 < -\sqrt{2} < \frac{-1}{2} < 0 < \frac{3}{2} < \sqrt{5} < 3,1415 \dots < 4$$

$$10.- \frac{-3}{2} < \frac{1}{4} < 0,5 < \frac{\sqrt{3}}{2} < \sqrt{2} < 2$$

17.- Todas son falsas

$$18.- a) 2 \quad b) -2 \quad c) \text{No existe ninguna raíz real} \quad d) 3$$

$$21.- a) \text{Sí} \quad b) \text{No} \quad c) \text{Sí} \quad d) \text{No}$$

$$22.- a) \sqrt[3]{3} > \sqrt{2} > \sqrt[6]{6} > \sqrt[5]{4} \quad b) \sqrt[4]{4} > \sqrt[5]{5} \quad c) \sqrt[3]{7} > \sqrt[4]{9} > \sqrt[5]{2}$$

$$23.- a) 2\sqrt{2} \quad b) 3\sqrt{2} \quad c) 5\sqrt{2} \quad d) 7\sqrt{2} \quad e) 2\sqrt{3} \quad f) 5\sqrt{3} \quad g) 10 \quad h) 2^3\sqrt{5}$$

$$24.- a) 2a^3\sqrt{a^2} \quad b) 2a^4\sqrt{a^3} \quad c) 2^3a^2b^4 \quad d) abc^2\sqrt[4]{a^2bc} \quad e) ab^2\sqrt[5]{a}$$

$$25.- a) 3\sqrt{3} \quad b) 2^3\sqrt{2} \quad c) 3^3\sqrt{2} \quad d) 2^4\sqrt{2} \quad e) 5\sqrt{3} \quad f) 2^5\sqrt{4} \quad g) \sqrt{3} \quad h) \sqrt{5}$$

$$26.- a) \sqrt[3]{40} \quad b) \sqrt[4]{5120} \quad c) \sqrt[5]{3645} \quad d) \sqrt[4]{\frac{3}{8}} \quad e) \sqrt[3]{56} \quad f) \sqrt[3]{25}$$

$$27.- a) \sqrt[10]{3^{22} \cdot 5} \quad b) \sqrt[12]{2} \quad c) \sqrt[8]{3} \quad d) \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \quad e) \sqrt[12]{2} \quad f) \frac{1}{\sqrt[4]{5}}$$

$$28.- a) -7\sqrt{5} \quad b) \frac{96\sqrt[3]{3}}{5}$$

$$29.- a) 180\sqrt{2} \quad b) \frac{1}{4} \quad c) \sqrt[6]{108} \quad d) \sqrt[12]{3^7}$$

$$30.- a) -29\sqrt{2} + 39 \quad b) 1 \quad c) 6 + 4\sqrt{3} \quad d) -72$$

$$31.- a) 5 \quad b) \sqrt[3]{74}$$

$$32.- a) 4\sqrt{2} \quad b) -9\sqrt{6} \quad c) 4^3\sqrt{2} - 4^3\sqrt{4} \quad d) 16 \quad e) \sqrt[6]{7^5} \quad f) 2 \quad g) \sqrt[6]{3}$$

$$33.- a) 6 - \sqrt{6} \quad b) \frac{-\sqrt{5}}{2} \quad c) \frac{\sqrt{2}-2}{2} \quad d) \frac{15^{10}\sqrt{3}-4^5\sqrt{-3^3}}{3} \quad e) \frac{-3^4\sqrt[4]{7^3}}{7}$$

$$34.- a) \sqrt{2} - 1 \quad b) -3(\sqrt{2} - \sqrt{3}) \quad c) 5\sqrt{3} + 10 \quad d) \frac{24+4\sqrt{10}}{13} \quad e) \frac{7\sqrt{11}+21}{2} \quad f) 5\sqrt{6} - 5\sqrt{7}$$

$$35.- a) \frac{\sqrt[3]{2+\sqrt{2}}}{\sqrt[6]{2^5}} \quad b) \frac{\sqrt[3]{2+\sqrt[18]{6^{11}}}}{\sqrt[9]{6 \cdot 2^3}}$$

$$36.- a) \frac{\sqrt[3]{5-\sqrt{5}-5}}{\sqrt[6]{5^5+5^3\sqrt{5}}} \quad b) \frac{\sqrt[3]{9-\sqrt[9]{3}}}{\sqrt[9]{3^7}}$$

$$37.- a) 3 \quad b) 4 \quad c) 3 \quad d) -4 \quad e) 33 \quad f) -4 \quad g) 2 \quad h) -1$$

$$38.- a) 5 \quad b) 2 \quad c) 6 \quad d) -5 \quad e) 2 \quad f) -14 \quad g) 3 \quad h) -2$$

$$39.- 2,89$$

$$40.- a) 3 \quad b) 9 \quad c) 4$$

$$41.- a) 4,4531 \quad b) 2,4771 \quad c) 2,5701 \quad d) 12,3855$$

$$42.- a) 243 \quad b) 125 \quad c) 0,5 \quad d) \frac{16}{81} \quad e) 245 \quad f) 123 \quad g) 1,5 \quad h) 279838$$

$$43.- a) \frac{1}{3} \quad b) \sqrt{5} \quad c) \sqrt{\frac{1}{3}} \quad d) \sqrt[5]{2}$$

$$44.- a) 1 \quad b) 4,9829 \quad c) -0,9102 \quad d) -5 \quad e) -2 \quad f) 9,9658 \quad g) -3,2693 \quad h) \frac{-14}{9}$$

$$45.- a) \frac{10}{3} \quad b) \pm \sqrt{3} \quad c) \pm 3 \quad d) 4 \quad e) \frac{16}{3} \quad f) \frac{3}{2} \quad g) \sqrt{2} \quad h) 1$$

### **Teorema: Raíz de 2 es irracional – Demostración por Reducción al Absurdo**

La demostración comienza suponiendo que raíz de 2 no es irracional y acabará en algo contradictorio. Si no es irracional debe ser obligatoriamente racional, es decir, debe ser igual a una fracción así:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

Podemos suponer sin ningún problema que el máximo común divisor de  $p$  y  $q$  es 1, es decir, que no tienen factores comunes y por tanto son primos relativos. Elevamos al cuadrado y operando queda:

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2$$

Por tanto  $p^2$  debe ser múltiplo de 2, lo que implica que  $p$  también es un múltiplo de 2. Es decir,  $p = 2k$  para un cierto  $k$ . Sustituimos este valor de  $p$  en la expresión anterior y simplificamos un 2 de esa igualdad:

$$2q^2 = (2k)^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2$$

Esa expresión nos asegura que  $q^2$  es múltiplo de 2, y por tanto también lo es  $q$ . Y aquí está el absurdo: habíamos supuesto que  $p$  y  $q$  no tenían factores comunes (es decir,  $\text{mcd}(p,q) = 1$ ) y hemos llegado a que los dos son múltiplos de 2, es decir, que tienen al 2 como factor común, y por tanto su mcd debe ser al menos 2. Esa es la contradicción que buscábamos.

**Conclusión: Raíz de 2 es irracional.**