



LÍMITES DE SUCESIONES. EL NÚMERO e

1. LÍMITE DE UNA SUCESIÓN.

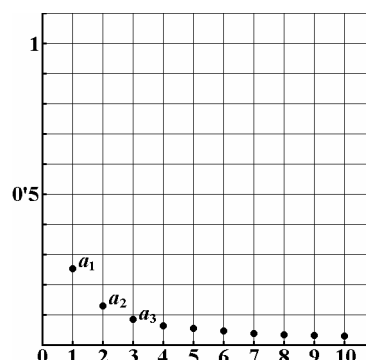
1.1. Aproximación al concepto de límite.

Vamos a acercarnos al concepto de límite hallando algunos términos de distintas sucesiones con la ayuda de la calculadora.

- Sucesión de término general $a_n = \frac{1}{4n}$

| a_1 | a_2 | a_3 | ... | a_{10} | ... | a_{100} | ... |
|-------|-------|-------|-----|----------|-----|-----------|-----|
| 0'25 | 0'125 | 0'083 | ... | 0'025 | ... | 0'0025 | ... |

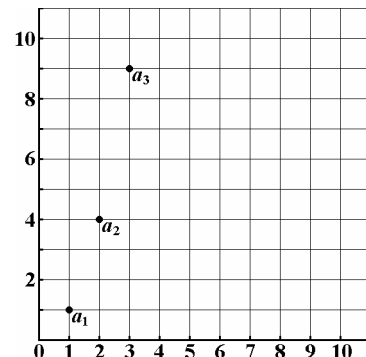
Los términos de esta sucesión se van acercando al número real 0 (las diferencias entre los términos de la sucesión y 0 son cada vez menores). El *límite* de la sucesión es 0.



- Sucesión de término general $a_n = n^2$

| a_1 | a_2 | a_3 | ... | a_{10} | ... | a_{100} | ... |
|-------|-------|-------|-----|----------|-----|-----------|-----|
| 1 | 4 | 9 | ... | 100 | ... | 10.000 | ... |

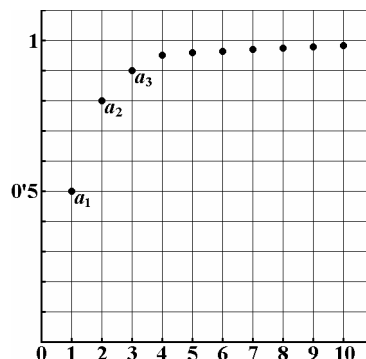
Los términos de esta sucesión se hacen cada vez mayores y sobrepasan cualquier número real por grande que sea. La sucesión no tiene *límite* real.



- Sucesión de término general $a_n = \frac{n^2}{n^2 + 1}$

| a_1 | a_2 | a_3 | ... | a_{10} | ... | a_{100} | ... |
|-------|-------|-------|-----|----------|-----|-----------|-----|
| 0'5 | 0'8 | 0'9 | ... | 0'99 | ... | 0'999 | ... |

Esta sucesión tiene por *límite* 1, pues sus términos se van acercando a 1 (sus diferencias con él son cada vez menores).



Primera aproximación a la idea de límite

Una sucesión (a_n) tiene por *límite* el número real a cuando, a medida que n toma valores cada vez mayores, los términos de la sucesión se aproximan cada vez más al número a .

1.2. Concepto de límite.

La idea de aproximación vista en el epígrafe anterior es muy imprecisa. Interesa que los términos de la sucesión se acerquen al valor del límite «tanto como se quiera». Veamos, con el siguiente ejemplo, que quiere decir esto.

La sucesión de término general $a_n = \frac{1}{4n}$ tiene por límite 0.

Hemos visto que las diferencias entre los términos de la sucesión y su límite se van haciendo cada vez menores. Por tanto, si fijamos un número muy pequeño, por ejemplo una milésima $\left(\frac{1}{1.000}\right)$ deberá verificarse que a partir de un cierto término todos los siguientes difieran de su límite menos que una milésima.

Como todos sus términos son ligeramente mayores que 0 ($a_1 = 0'25$, $a_2 = 0'125$, $a_3 = 0'083$, ...), habrá que ver cuándo $a_n - 0$ se hace menor que $\frac{1}{1.000}$.

$$a_n - 0 = \frac{1}{4n} - 0 = \frac{1}{4n} < \frac{1}{1.000} \Leftrightarrow 1.000 < 4n \Leftrightarrow n > 250$$

Esto significa que a_{251} y todos los términos siguientes difieren de 0 menos que la cantidad que hemos prefijado.

En efecto: $a_{251} - 0 = \frac{1}{1.004} < \frac{1}{1.000}$, $a_{252} - 0 = \frac{1}{1.008} < \frac{1}{1.000}$, etc.

Una sucesión (a_n) tiene **límite** cuando las diferencias entre los términos y el valor del límite se hacen tan pequeñas como queramos sin más que darle a n valores tan grandes como sea necesario.

1.3. Definición de límite.

Retomemos el ejemplo anterior y fijemos ahora un número aún menor, como $\frac{1}{100.000}$.

$$a_n - 0 = \frac{1}{4n} < \frac{1}{100.000} \Leftrightarrow 100.000 < 4n \Leftrightarrow n > 25.000$$

A partir del término $a_{25.000}$ los siguientes difieren de 0 menos que $\frac{1}{100.000}$:

$$a_{25.001} - 0 = \frac{1}{100.004} < \frac{1}{100.000}, \quad a_{25.002} - 0 = \frac{1}{100.008} < \frac{1}{100.000}, \quad \text{etc.}$$

Así pues, sea cual sea el número que fijemos, siempre podremos encontrar un término a partir del cual $|a_n - 0|$ sea menor que ese número. Con esta idea establecemos la siguiente definición de límite.

Una sucesión de números reales (a_n) tiene por **límite** el número real a (también se dice que es una **sucesión convergente** hacia a) y se simboliza por $\lim a_n = a$, cuando dado un número real r positivo, por pequeño que sea, existe un término de la sucesión tal que todos los siguientes a él verifican:

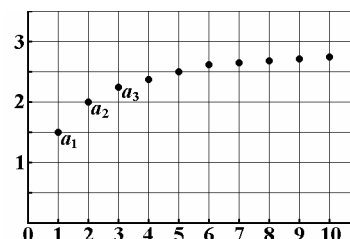
$$|a_n - a| < r$$

Ejemplo. Averigua a partir de qué término de la sucesión $a_n = \frac{3n}{n+1}$ todos los siguientes difieren de su límite 3 menos que $1/50$.

$$a_1 = 1'5, a_2 = 2, a_3 = 2'25, \dots, a_{100} = 2'97, \dots$$

$$3 - a_n = 3 - \frac{3n}{n+1} = \frac{3}{n+1} < \frac{1}{50} \Leftrightarrow 150 < n+1 \Leftrightarrow n > 149$$

El término a_{150} y todos los siguientes difieren de 3 menos que $1/50$.



Ejemplo. La sucesión de término general $a_n = \frac{(-1)^n(n+2)}{5n^2}$ tiene por límite 0.

¿A partir de qué término se verifica que todos los siguientes difieren del límite menos que una milésima?

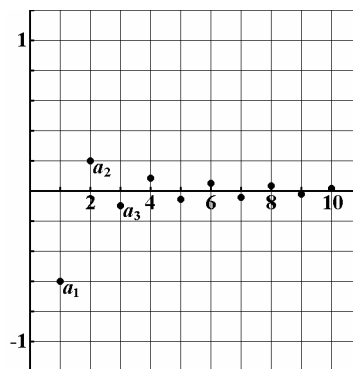
$$a_1 = -0'6, a_2 = 0'2, a_3 = -0'11, \dots, a_{100} = 0'002, \dots$$

$$|a_n - 0| = \left| \frac{(-1)^n(n+2)}{5n^2} - 0 \right| < \frac{1}{1.000} \Leftrightarrow \frac{n+2}{5n^2} < \frac{1}{1.000} \Leftrightarrow$$

$$1.000(n+2) < 5n^2 \Leftrightarrow 200(n+2) < n^2 \Leftrightarrow$$

$$n^2 - 200n - 400 > 0 \Leftrightarrow n > 201'98$$

Luego a partir del término a_{202} se verifica que todos los siguientes difieren del límite menos de una milésima.



Ejemplo. Demuestra que *toda sucesión constante es convergente*.

Sea k un número real y consideremos la sucesión constante $a_n = k$: $a_1 = k, a_2 = k, a_3 = k, \dots$

Dado cualquier número real positivo r , se verifica que $|a_n - k| = |k - k| = 0 < r$

Por tanto, toda sucesión constante es convergente, siendo $\lim a_n = k$.

Ejemplo. Un caso particular de sucesiones convergentes son las llamadas *sucesiones nulas*, que son aquellas cuyo límite es 0.

Por ejemplo, si k es un número real cualquiera, son sucesiones nulas $\left(\frac{k}{n}\right), \left(\frac{k}{n^2}\right), \left(\frac{k}{n^3}\right), \dots$, pues fácil-

mente podemos comprobar que $\lim \frac{k}{n} = \lim \frac{k}{n^2} = \lim \frac{k}{n^3} = \dots = 0$.

En general, si $P(n)$ es un polinomio en n , la sucesión $\left(\frac{k}{P(n)}\right)$ es nula: $\lim \frac{k}{P(n)} = 0$.

EJERCICIOS

1. Dadas las siguientes sucesiones de término general:

a) $a_n = \frac{2n-3}{4n+5}$ b) $b_n = \frac{n+1}{n}$

Encuentra el valor al que sus términos se van aproximando.

2. En la sucesión de término general $a_n = 3 + \frac{1}{n}$ halla un término a partir del cual todos los siguientes difieran de 3 menos que una milésima. Igual en menos que $1/500$.

3. Dada la sucesión de término general $a_n = \frac{2n-1}{n+1}$ encuentra el valor al que sus términos se van aproximando. ¿A partir de qué término, él y todos los siguientes difieren de ese valor menos que $0'001$?

4. En la sucesión $\frac{5}{7}, \frac{7}{9}, \frac{9}{11}, \frac{11}{13}, \dots$ halla un término a partir del cual todos los siguientes difieran de 1 menos que una centésima.

5. En la sucesión de término general $a_n = \frac{2n^3+1}{n^3+1}$ halla un término a partir del cual todos los siguientes difieran de su límite menos que $0'0005$. Compruébalo con algunos términos.

6. Prueba que las sucesiones de término general $a_n = (-1)^n + 1$ y $b_n = \frac{2^n + (-2)^n}{2^n}$ carecen de límite.

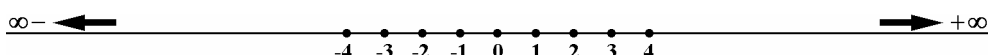
2. SUCESIONES DIVERGENTES.

No hay un número real que sea el mayor de todos (de existir, al sumarle uno se tendría a su vez otro número real que sería mayor que el anterior). Y análogamente, tampoco existe un número real que sea el menor de todos. Para algunas cuestiones, en cambio, sería deseable disponer de símbolos que, aunque no sean números reales, permitan manejar esas ideas.

A estos nuevos símbolos los llamaremos **más infinito** ($+\infty$) y **menos infinito** ($-\infty$):

- $+\infty$ es mayor que cualquier número real.
- $-\infty$ es menor que cualquier número real.

La idea gráfica es la siguiente:



- Consideremos la sucesión de término general $a_n = 2n + 1$: $a_1 = 3, a_2 = 5, a_3 = 7, \dots, a_{100} = 201, \dots$

Sus términos se hacen cada vez mayores, de manera que por grande que sea un número real k que fijemos, se puede conseguir encontrar términos que sean mayores que él. Por ejemplo, si tomamos $k = 100.000$:

$$a_n = 2n + 1 > 100.000 \Leftrightarrow n > 49.999,5$$

Así, a partir del término $a_{50.000}$ se verifica que $a_n > 100.000$. Por ejemplo, $a_{50.000} = 100.001, a_{60.000} = 120.001, \dots$ Diremos entonces que la sucesión (a_n) *tiende a más infinito*.

Una sucesión de números reales (a_n) *tiende a más infinito* y se simboliza por $\lim a_n = +\infty$, si dado un número real k , por grande que sea, existe un término de la sucesión tal que todos los siguientes a él son mayores que k .

- Sea ahora la sucesión de término general $a_n = -n^3$: $a_1 = -1, a_2 = -8, a_3 = -27, \dots, a_{100} = -1.000.000, \dots$

Sus términos se van haciendo cada vez menores, de modo que por pequeño que sea un número real k que fijemos, se puede conseguir encontrar términos que sean menores que él. Por ejemplo, tomemos $k = -10.000$:

$$a_n = -n^3 < -10.000 \Leftrightarrow n^3 > 10.000 \Leftrightarrow n > 21,54$$

Por tanto, a partir del término a_{22} se verifica que $a_n < -10.000$. Por ejemplo, $a_{22} = -10.648, a_{50} = -125.000, \dots$ Se dice entonces que la sucesión (a_n) *tiende a menos infinito*.

Una sucesión de números reales (a_n) *tiende a menos infinito* y se simboliza por $\lim a_n = -\infty$, si dado un número real k , por pequeño que sea, existe un término de la sucesión tal que todos los siguientes a él son menores que k .

Las sucesiones que tienen por límite $+\infty$ o $-\infty$ se llaman **sucesiones divergentes**.

Ejemplo. Dado $k = 1.000$ y la sucesión de término general $a_n = 2n^2 + 5$, averigua a partir de qué término de la misma todos los siguientes son mayores que k . Compruébalo con algunos términos posteriores.

$$a_1 = 7, a_2 = 13, a_3 = 23, \dots, a_{100} = 20.005, \dots$$

$$a_n = 2n^2 + 5 > 1.000 \Leftrightarrow 2n^2 > 995 \Leftrightarrow n^2 > 497,5 \Leftrightarrow n > 22,3$$

A partir del término a_{23} se cumple la condición exigida: $a_{23} = 1.063, a_{40} = 3.205, \dots$

Ejemplo. Las sucesiones (n) , (n^2) , (n^3) , ... son sucesiones divergentes, pues $\lim n = \lim n^2 = \lim n^3 = \dots = +\infty$.
En general, si $P(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_2 n^2 + a_1 n + a_0$ es un polinomio en n , se tiene que:

$$\lim P(n) = \begin{cases} +\infty & \text{si } a_k > 0 \\ -\infty & \text{si } a_k < 0 \end{cases}$$

EJERCICIOS

- Dado $k = 10.000$, averigua a partir de qué término de la sucesión $a_n = 3n + 1$ todos los siguientes son mayores que k .
- Dado $k = -1.000$, averigua a partir de qué término de la sucesión $a_n = \frac{-5n+2}{8}$ todos los siguientes son menores que k .
- Dado $k = 1.482$, averigua a partir de qué término de la sucesión $1 \cdot 2, 2 \cdot 3, 3 \cdot 4, 4 \cdot 5, \dots$ todos los siguientes son mayores que k .

3. OPERACIONES CON $+\infty$ y $-\infty$.

Es posible además, en bastantes casos, efectuar operaciones entre estos dos nuevos elementos y los números reales. A continuación se indican los resultados de estas operaciones. Para comprenderlas, ten presente que el símbolo $+\infty$ indica números cada vez mayores, y $-\infty$ números cada vez menores.

Sea a un número real:

Suma y resta

- $a + (\pm\infty) = \pm\infty$
- $a - (\pm\infty) = \mp\infty$

Producto y cociente

- $a > 0 \Rightarrow \begin{cases} a \cdot (\pm\infty) = \pm\infty \\ \frac{\pm\infty}{a} = \pm\infty \end{cases}$
- $a < 0 \Rightarrow \begin{cases} a \cdot (\pm\infty) = \mp\infty \\ \frac{\pm\infty}{a} = \mp\infty \end{cases}$
- $\frac{a}{\pm\infty} = 0$ cualquiera que sea a .

Operaciones con $+\infty$ y $-\infty$

- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
- $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
- $(+\infty) \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$
- $(-\infty) \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$

Sin embargo, hay casos en los que la operación con estos nuevos símbolos plantea problemas, como veremos en el siguiente epígrafe.

Ejemplo. La sucesión de término general $a_n = \frac{1}{4n}$ tiene por límite 0, y la sucesión $b_n = 2n + 1$ tiende a $+\infty$. Estudia si la sucesión $(c_n) = (a_n) \cdot (b_n)$ es convergente.

$$c_n = \frac{2n+1}{4n}: c_1 = 0,75, c_2 = 0,625, c_3 = 0,583, \dots, c_{100} = 0,5025, \dots, c_{1.000} = 0,50025, \dots$$

Esta sucesión tiene por límite $\frac{1}{2}$, pues dado por ejemplo $r = \frac{1}{1.000}$:

$$c_n - \frac{1}{2} = \frac{2n+1}{4n} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4n} < \frac{1}{1.000} \Leftrightarrow 4n > 1.000 \Leftrightarrow n > 250$$

Luego a partir de c_{251} todos los términos siguientes difieren del límite menos que una milésima, por tanto (c_n) es una sucesión convergente, siendo $\lim c_n = \frac{1}{2}$.

4. PROPIEDADES DE LOS LÍMITES.

Sean (a_n) y (b_n) *sucesiones convergentes* con límites finitos $\lim a_n = a$ y $\lim b_n = b$. A partir de la definición de límite se pueden demostrar las siguientes propiedades.

- El límite del producto de un número real k por una sucesión es igual al producto del número por el límite de la sucesión.

$$\lim (k \times a_n) = k \times \lim a_n = k \times a$$

- El límite de la sucesión suma (resta) es igual a la suma (resta) de los límites.

$$\lim (a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n = a \pm b$$

- El límite de la sucesión producto es igual al producto de los límites.

$$\lim (a_n \times b_n) = \lim a_n \times \lim b_n = a \times b$$

- El límite de la sucesión cociente es igual al cociente de los límites, si el límite del denominador es distinto de cero.

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n} = \frac{a}{b} \quad \text{si } \lim b_n = b \neq 0$$

Ejemplo. Halla el límite de las siguientes sucesiones.

a) $3 + \frac{2}{n}$

b) $\frac{4n^2 - 1}{3n^2}$

a) $\lim \left(3 + \frac{2}{n} \right) = \lim 3 + \lim \frac{2}{n} = \lim 3 + 2 \cdot \lim \frac{1}{n} = 3 + 2 \cdot 0 = 3$

b) $\lim \left(\frac{4n^2 - 1}{3n^2} \right) = \lim \left(\frac{4n^2}{3n^2} - \frac{1}{3n^2} \right) = \lim \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3n^2} \right) = \lim \frac{4}{3} - \lim \frac{1}{3n^2} = \frac{4}{3} - 0 = \frac{4}{3}$

EJERCICIOS

10. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim (7 + n)$

b) $\lim \left(7 - \frac{1}{n} \right)$

c) $\lim (7 - n^2)$

d) $\lim \left(6 + \frac{1}{n^3} \right)$

e) $\lim 7n$

f) $\lim \left(\frac{3}{n} \cdot n \right)$

g) $\lim 3^n$

h) $\lim \left(\frac{1}{3} \right)^n$

i) $\lim [-5n^3 \cdot (n^2 - 100)]$

j) $\lim (2n^3)^{-2}$

k) $\lim (23 + 10^{-n})$

l) $\lim (8n^{-2} - 7n^{-3} - 500)$

5. LÍMITES INDETERMINADOS. CÁLCULO DE LÍMITES.

- Hay casos en los que al efectuar operaciones con límites de sucesiones aparecen las llamadas *expresiones indeterminadas*.

Por ejemplo, dadas las sucesiones de término general $a_n = 2n + 1$ y $b_n = 5n$ con $\lim a_n = \lim b_n = +\infty$, si tratamos de hallar el límite de la sucesión cociente $\frac{a_n}{b_n} = \frac{2n+1}{5n}$, debería tender, por tanto, a una expresión de la forma $\frac{\infty}{\infty}$, que llamaremos *expresión indeterminada*.

En este caso, hacemos desaparecer la indeterminación calculando directamente el límite de la sucesión cociente:

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{2n+1}{5n} = \lim \left(\frac{2n}{5n} + \frac{1}{5n} \right) = \lim \frac{2}{5} + \lim \frac{1}{5n} = \frac{2}{5} + 0 = \frac{2}{5}$$

Por tanto, en este ejemplo la sucesión cociente tiene límite real, es decir, es convergente, sin serlo las sucesiones del numerador y del denominador.

Las **expresiones indeterminadas** que pueden aparecer al efectuar operaciones con sucesiones son:

| | | | | |
|------------------------|------------------|----------------------------|----------------------|----------------------|
| Racionales : | 1) $\frac{0}{0}$ | 2) $\frac{\infty}{\infty}$ | 3) $0 \times \infty$ | 4) $\infty - \infty$ |
| Exponenciales : | 5) 1^∞ | 6) ∞^0 | 7) 0^0 | |

- Si al tratar de calcular el límite de una sucesión aparece un caso de indeterminación, habrá que seguir otro camino para hallarlo.

Veamos un procedimiento para el cálculo de límites de sucesiones en las que el término general es un cociente de polinomios en n .

El polinomio numerador y el polinomio denominador tienden a infinito, por lo que el límite del cociente es una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Para que desaparezca dicha indeterminación, **se divide el numerador y el denominador por la máxima potencia de n que haya en el denominador**.

Por ejemplo:

$$\lim \frac{2n^4 + 5n^3 - 3n^2 + 1}{-n^4 + 2n^3 - n + 4} \equiv \frac{+\infty}{-\infty} = \lim \frac{\frac{2n^4}{n^4} + \frac{5n^3}{n^4} - \frac{3n^2}{n^4} + \frac{1}{n^4}}{\frac{-n^4}{n^4} + \frac{2n^3}{n^4} - \frac{n}{n^4} + \frac{4}{n^4}} = \lim \frac{2 + \frac{5}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^4}}{-1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^3} + \frac{4}{n^4}} = \frac{2+0-0+0}{-1+0-0+0} = \frac{2}{-1} = -2$$

Ejemplo. Sean $a_n = \frac{2n^2 - n}{n^3 + 1}$ y $b_n = \frac{3n^3 + 2}{n^2 - 5}$. Calcula $\lim a_n$, $\lim b_n$ y $\lim (a_n \cdot b_n)$.

$$\bullet \quad \lim a_n = \lim \frac{2n^2 - n}{n^3 + 1} \equiv \frac{+\infty}{+\infty} = \lim \frac{\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^3}} = \frac{0-0}{1+0} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\bullet \quad \lim b_n = \lim \frac{3n^3 + 2}{n^2 - 5} \equiv \frac{+\infty}{+\infty} = \lim \frac{3n + \frac{2}{n^2}}{1 - \frac{5}{n^2}} = \frac{\infty+0}{1-0} = \frac{+\infty}{1} = +\infty$$

- $\lim (a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n \equiv 0 \cdot (+\infty)$. Al aparecer esta indeterminación, lo hallamos directamente:

$$\lim (a_n \cdot b_n) = \lim \left(\frac{2n^2 - n}{n^3 + 1} \cdot \frac{3n^3 + 2}{n^2 - 5} \right) = \lim \frac{6n^5 - 3n^4 + 4n^2 - 2n}{n^5 - 5n^3 + n^2 - 5} = \lim \frac{6 - \frac{3}{n} + \frac{4}{n^3} - \frac{2}{n^4}}{1 - \frac{5}{n^2} + \frac{1}{n^3} - \frac{5}{n^5}} = \frac{6}{1} = 6$$

EJERCICIOS

11. Dadas las sucesiones de término general $a_n = \frac{7n+1}{2n+3}$ y $b_n = \frac{4n^2-1}{n^2+3}$, calcula:

- a) $\lim a_n$ b) $\lim b_n$ c) $\lim (a_n + b_n)$ d) $\lim (a_n - b_n)$ e) $\lim (a_n \cdot b_n)$ f) $\lim (a_n : b_n)$

12. Dadas las sucesiones de término general $a_n = \frac{3+4n^2}{1-2n}$ y $b_n = \frac{5-3n}{5n^2+3}$, calcula:
- a) $\lim a_n$ b) $\lim b_n$ c) $\lim (a_n + b_n)$ d) $\lim (a_n \cdot b_n)$ e) $\lim (a_n : b_n)$ f) $\lim (a_n : b_n)$
13. Calcula los siguientes límites.
- a) $\lim \frac{2n^2 - 5n + 7}{3n^2}$ b) $\lim \frac{5n^4 - 2n^3 + n^2 - n + 1}{3n^3 + 2n^2 - n + 3}$ c) $\lim \frac{(n+1)^2}{2n^2}$ d) $\lim \frac{3n^2 - 1}{4n^3 + 2}$
14. Calcula los siguientes límites.
- a) $\lim \frac{(n+1)^2 - (n-1)^2}{5n+3}$ b) $\lim \frac{(n+1)^2 + (n-1)^2}{5n+3}$ c) $\lim \frac{(n+1)^2}{2n^2}$
15. Dadas las sucesiones $a_n = n^2 + 3$, $b_n = \frac{1}{n^2}$ y $c_n = \frac{n^2 + 1}{n}$ de límites $\lim a_n = +\infty$, $\lim b_n = 0$ y $\lim c_n = +\infty$, calcula los siguientes límites, indicando cuando sea necesario que tipo de expresiones indeterminadas aparecen.
- a) $\lim (a_n + b_n)$ b) $\lim (a_n - b_n)$ c) $\lim (a_n + c_n)$ d) $\lim (a_n - c_n)$ e) $\lim (b_n + c_n)$ f) $\lim (b_n - c_n)$
- g) $\lim (a_n \cdot b_n)$ h) $\lim (a_n \cdot c_n)$ i) $\lim (b_n \cdot c_n)$ j) $\lim (b_n : a_n)$ k) $\lim (a_n : c_n)$ l) $\lim (a_n : b_n)$
16. A la vista de los ejercicios realizados, ¿serías capaz de dar la expresión general del límite del cociente de dos polinomios cualesquiera según sean sus grados?
17. Calcula $\lim \frac{2^n + (-2)^n}{3^n}$.
18. Calcula los siguientes límites.
- a) $\lim \sqrt{\frac{8n+2}{n-1}}$ b) $\lim \frac{\sqrt[3]{n^3 + 2n - 1}}{n+1}$ c) $\lim \frac{\sqrt[3]{n^2 + 2}}{n+1}$

6. EL NÚMERO E.

En muchas aplicaciones de las matemáticas aparece la sucesión cuyo término general es $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Para intentar averiguar el límite de esta sucesión utilizamos una nueva propiedad de los límites:

El límite de una sucesión de la forma $(a_n)^{b_n}$ es igual al límite de la base elevado al límite del exponente:

$$\lim (a_n)^{b_n} = (\lim a_n)^{\lim b_n}$$

Aplicando esta propiedad a dicha sucesión se obtiene que $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \equiv 1^\infty$ que, como hemos visto, es una expresión indeterminada.

Halleemos algunos términos de la misma con la calculadora:

$$a_1 = 2'000000 \quad a_4 = 2'441406$$

$$a_2 = 2'250000 \quad a_5 = 2'488320$$

$$a_3 = 2'370370 \quad a_6 = 2'521663$$

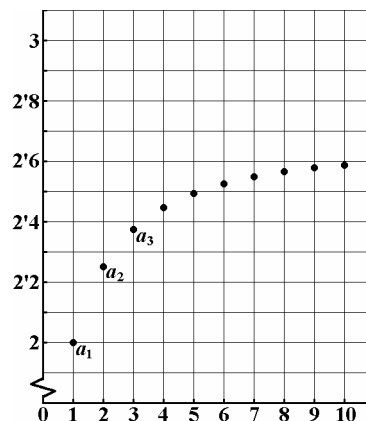
Y calculemos también algunos términos de índice n bastante grande:

$$a_{100} = 2'704814$$

$$a_{1.000} = 2'716924$$

$$a_{1.000.000} = 2'718280$$

$$a_{100.000.000} = 2'718281$$



A la vista de estos valores observamos dos propiedades de la sucesión:

- Cada término de la sucesión es menor o igual que el siguiente: se trata de una sucesión **monótona creciente**.
- Todos los valores que se han hallado están entre 2 y 3. Se puede probar que esta sucesión está acotada superior e inferiormente, es decir, se trata de una sucesión **acotada**.

No obstante, para saber si una sucesión es convergente existe un resultado muy importante que relaciona la convergencia con la monotonía y la acotación de las sucesiones.

Teorema sobre monotonía y acotación de sucesiones

- Toda sucesión monótona creciente y acotada superiormente es convergente.
- Toda sucesión monótona decreciente y acotada inferiormente es convergente.

Como hemos visto anteriormente, la sucesión $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ es monótona creciente y está acotada superiormente.

En consecuencia:

La sucesión $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ es **convergente**, y a su límite se le llama **número e**: $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

El número **e** es un **número irracional**, es decir, con infinitas cifras decimales no periódicas. Sus primeras cifras son:

$$e = 2,71828182845904523536...$$

Su importancia en matemáticas sólo es comparable con el número π . Al igual que éste, el número e es trascendente, es decir, no es solución de ninguna ecuación polinómica de la forma $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$, con coeficientes enteros. Sin embargo, al contrario que π , e no tiene una interpretación geométrica sencilla.

Aparece en los cálculos bancarios y de interés compuesto; es la base de los logaritmos neperianos o naturales y es omnipresente en el análisis matemático.

Ejemplo. Calcula los límites: a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+3}$

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right]^2 = e^2$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+3} = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 = e \cdot 1^3 = e$$

6.1. Límites del número e: indeterminaciones del tipo 1^∞ .

Si (a_n) y (b_n) son sucesiones tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{b_n} = 1^\infty$. Se puede demostrar que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{b_n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} [b_n(a_n - 1)]}$$

Ejemplo. $\lim \left(1 + \frac{1}{n+7}\right)^n \equiv 1^\infty = e^{\lim \left[n \left(1 + \frac{1}{n+7} - 1\right)\right]} = e^{\lim \frac{n}{n+7}} = e^1 = e$

EJERCICIOS

19. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-2n}$ b) $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^5}$

20. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ b) $\lim \left(n + \frac{1}{2n}\right)^5$ c) $\lim \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$

21. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim \left(\frac{3n+5}{n+5}\right)^n$ b) $\lim \left(\frac{2n^3-3n+7}{n+2}\right)^7$ c) $\lim \left(\frac{n+4}{n+3}\right)^{n+2}$ d) $\lim \left(\frac{3n^2-1}{2n^2+1}\right)^{2n-3}$

22. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim \left(\frac{n^2-2n+3}{n^2-2n}\right)^n$ b) $\lim \left(\frac{n^3-1}{n^3}\right)^{2n^3-7}$ c) $\lim \left(\frac{5n-4}{5n+2}\right)^{\frac{n+1}{3}}$ d) $\lim \frac{3}{\left(\frac{3n-1}{3n+1}\right)^{7n}}$

23. Dada la sucesión de término general $a_n = \sqrt[3n+1]{\left(\frac{5n-4}{2+5n}\right)^{2n-5}}$, ¿es de la forma del número e ? Razona la respuesta.
¿Eres capaz de hallar su límite?