

Funciones

1. Definición

2. Operaciones con funciones

- Suma y diferencia
- Producto
- Cociente
- Composición de funciones
- Función recíproca (inversa)

3. Estudio de una función:

- Dominio
- Recorrido
- Puntos de corte
- Signo de la función
- Simetría
- Continuidad
- Periodicidad
- Crecimiento-Decrecimiento
- Máximos y Mínimos

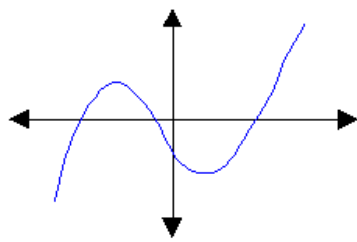
4. Tipos de funciones:

- Función a trozos
- Función valor absoluto
- Funciones polinómicas
- Funciones racionales
- Función exponencial
- Funciones trigonométricas

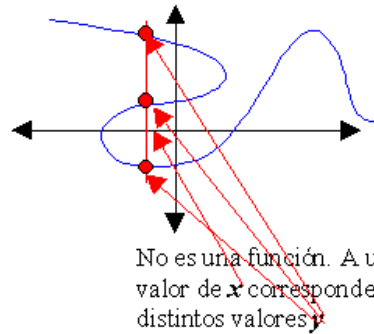
DEFINICIÓN

Una función es una relación entre dos magnitudes siempre que a cada valor de la variable independiente le corresponde un único valor de la variable dependiente

La variable independiente se suele representar por x , y la letra y representa el valor de la variable dependiente. La relación o función que existe entre ambas se suele representar por la letra f , de la siguiente forma $f(x)=y$



Es una función



No es una función. A un valor de x corresponden distintos valores y

OPERACIONES CON FUNCIONES

Suma y diferencia

Dadas dos funciones f y g se define la función suma $f+g$ por:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

Ej: Sea $f(x)=x+3$ y $g(x)=x^2+2x-4$.

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=x+3+x^2+2x-4=x^2+3x-1.$$

Producto

Dadas dos funciones f y g se define la función producto $f.g$ así

$$(f.g)(x)=f(x).g(x)$$

Ej: Sea $f(x)=x+3$ y $g(x)=x^2+2x-4$.

$$(f.g)(x)=f(x).g(x)=(x+3).(x^2+2x-4)=x^3+2x^2-4x+3x^2+6x-12=x^3+5x^2+2x-12$$

Cociente

Dadas dos funciones f y g se define la función cociente f/g por:

$$(f/g)(x)=f(x)/g(x), \text{ siempre que } g(x) \text{ sea distinto de } 0.$$

Ej: Sea $f(x)=x+3$ y $g(x)=x^2+2x-4$.

$$(f/g)(x)=f(x)/g(x)=(x+3)/(x^2+2x-4)$$

Composición de funciones

Dadas las funciones f y g se define la función compuesta:

f compuesta con g : $g \circ f(x) = g(f(x))$

Se calcula: poniendo en la expresión de g , en lugar de x , la expresión de $f(x)$.

A continuación, se realizan operaciones para simplificar la expresión.

Ej: Dadas las funciones $f(x) = x + 3$ y $g(x) = x^2$

Calcula $g \circ f = g(f(x)) = (f(x))^2 = (x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$

$f \circ g = f(g(x)) = g(x) + 3 = x^2 + 3$

Pongamos otro ejemplo: si f y g son las funciones definidas por:

$$f(x) = \frac{x-3}{2} \quad g(x) = \sqrt{x}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{\frac{x-3}{2}}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{g(x)-3}{2} = \frac{\sqrt{x}-3}{2}$$

Función recíproca (inversa)

Se llama **inversa** de f y se representa por f^{-1} cuando cumple que $f \circ f^{-1} = 1$

Las gráficas de f y f^{-1} son simétricas respecto a la bisectriz del primer y tercer cuadrante.

Cálculo práctico de la inversa

Si $y = f(x)$ la expresión de f^{-1} se obtiene despejando la x :

Vamos a verlo con un ejemplo:

$$f(x) = \frac{x-3}{2}$$

Despejamos la x : $2 \cdot f(x) = x - 3 \quad \square \quad x = 2 \cdot f(x) + 3$

Luego: $f^{-1} = 2x + 3$

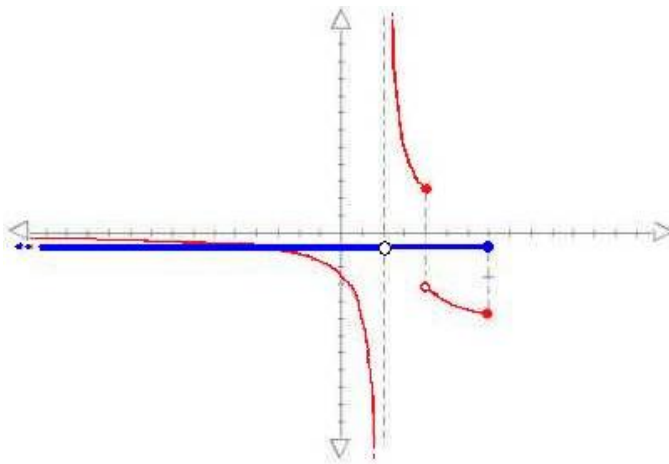
ESTUDIO DE UNA FUNCIÓN

Dominio de una función

Es el conjunto de todos los valores que puede tomar la variable independiente.

Obtención del dominio de definición a partir de la gráfica.

Cuando una función se nos presenta en forma de una gráfica, simplemente con observar el eje de abscisas de dicha gráfica podemos saber el dominio de la función. Porque cualquier valor de x del dominio tiene su correspondiente imagen y por ello le corresponde un punto de la gráfica.



En el ejemplo vemos coloreado de azul el dominio (está dibujado un poco más abajo del eje para que sea bien visible).

En este caso tenemos que $D[f(x)] = (-\infty, 2) \cup (2, 7]$

Obtención del dominio de definición a partir de la expresión algebraica

FUNCIONES POLINOMICAS

Aquellas cuya expresión algebraica es un polinomio, las **funciones polinómicas**, tienen como **dominio** todo el conjunto de los números reales: \mathbb{R} , puesto que a partir de una expresión polinómica, sustituyendo el valor de $x=a$ (siendo a un número real) podemos calcular el valor de $f(a)=y$

Por ejemplo:

$$f(x) = 2x^5 - 7x + 1; \quad D[f(x)] = \mathbb{R}$$

$$g(x) = -9x + 3; \quad D[g(x)] = \mathbb{R}$$

Colegio Antonio de Nebrija
Matemáticas

$$h(x)=5 ; \quad D[h(x)] = \mathbb{R}$$

FUNCIONES RACIONALES

Si la función es racional, Es decir que su expresión es un cociente de dos polinomios, tenemos que excluir del dominio las raíces del polinomio denominador (soluciones de la ecuación). Así pues si el polinomio denominador es $Q(x)$, resolveremos la ecuación $Q(x)=0$ y obtendremos dichas raíces x_1, x_2, \dots, x_n , y así tendremos que $D[f(x)] = \mathbb{R} - \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Esto significa que forman el **dominio** de la función todos los números reales salvo x_1, x_2, \dots, x_n .

Por ejemplo:

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2-9}$$

Resolvemos la ecuación $x^2 - 9 = 0$

$$x_1 = +3 \quad \text{y} \quad x_2 = -3.$$

$$D[f(x)] = \mathbb{R} - \{-3, +3\}$$

FUNCIONES IRRACIONALES

Funciones irracionales son las que vienen expresadas a través de un radical que lleve en su radicando la variable independiente.

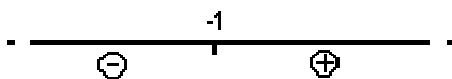
Si el radical tiene índice impar, entonces el dominio será todo el conjunto \mathbb{R} de los números reales porque al elegir cualquier valor de x siempre vamos a poder calcular la raíz de índice impar de la expresión que haya en el radicando.

Si el radical tiene índice par, para los valores de x que hagan el radicando negativo no existirá la función. Para calcular el dominio de este tipo de funciones resolvemos la inecuación $f(x) > 0$, la solución de dicha inecuación es el dominio de la función

Ejemplos:

$$f(x) = \sqrt{x+1}$$

Resolvemos la inecuación $x + 1 \geq 0$; $\square \quad x \geq -1$;




$$D[f(x)] = [-1, +\infty).$$

Colegio Antonio de Nebrija
Matemáticas

$$g(x) = \sqrt[4]{x^2 - 25}$$

Resolvemos la inecuación $x^2 - 25 \geq 0$; y obtenemos $x = 5$ y $x = -5$. La recta real queda dividida en tres zonas y probamos en cuál de ellas se da que el signo

del radicando sea positivo.



Por lo tanto $D[g(x)] = (-\infty, -5] \cup [+5, +\infty)$

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x^2 - 2x - 8}}$$

Resolvemos la inecuación $x^2 - 2x - 8 > 0$; y obtenemos $x = -2$ y $x = 4$

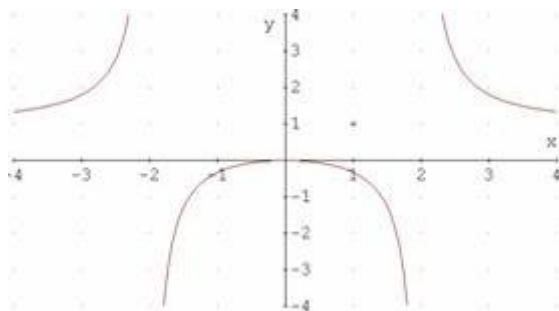
Ahora la inecuación se plantea con desigualdad estricta, esto es porque el radicando está en un denominador y por lo tanto no puede valer 0.

$$D[h(x)] = (-\infty, -2) \cup (+4, +\infty)$$

Recorrido de la función

Es el conjunto de todos los valores que toma variable dependiente

En esta función el recorrido es $R[f(x)] = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$



Puntos de corte con los ejes

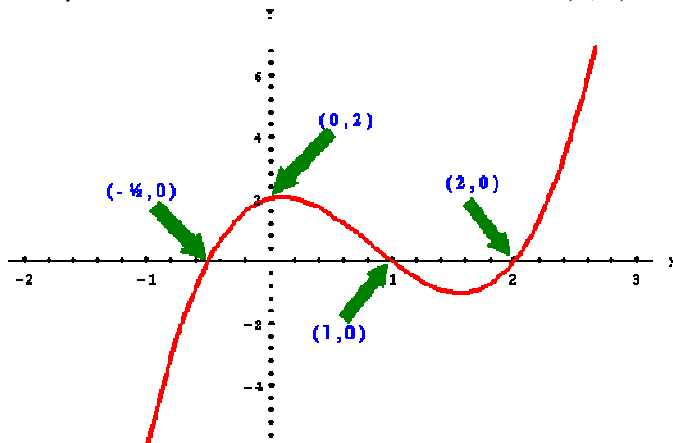
Son los puntos en los que la gráfica de la función corta al eje OX o al eje OY.

- Corta al eje OY cuando $x=0$. Sustituimos en la función $x=0$ y calculamos $f(x)=y$

El punto de corte será de la forma $(0, f(x))$

- Corta al eje OX cuando $f(x)=0$. Planteamos una ecuación y calculamos los valores de x .

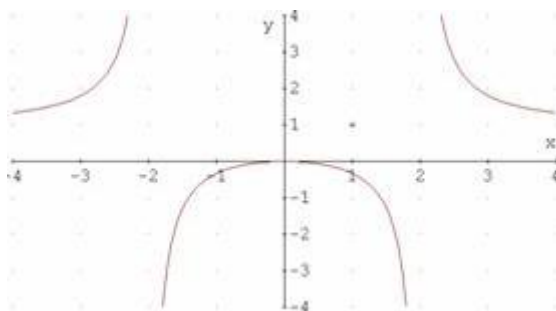
Los puntos de corte serán de la forma $(x,0)$



Signo de la función (Regionamiento)

Se trata de encontrar las zonas en las que la función tiene signo positivo o negativo. Para determinar estas zonas o intervalos debemos de tener en cuenta, puntos que se anulan en el dominio de la función, los puntos de corte con el eje OX, pues solamente en uno de estos lugares la función puede cambiar de signo.

Para ver el signo en cada uno de estos intervalos basta con sustituir en la función el valor de x por el de algún punto del intervalo a estudiar y comprobar el signo en dicho intervalo

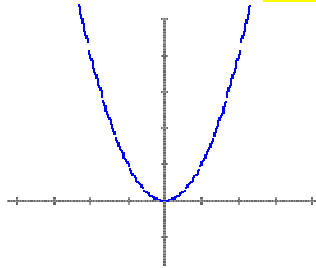


$f(x)$ es creciente en el intervalo $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$

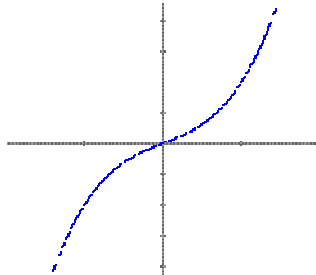
$f(x)$ es decreciente en el intervalo $(0, 2) \cup (2, \infty)$

Simetría

Decimos que una función es par cuando es simétrica respecto al eje vertical, es decir, cuando $f(-x) = f(x)$



Decimos que una función es impar cuando es simétrica respecto del origen de coordenadas, es decir, cuando $f(-x) = -f(x)$

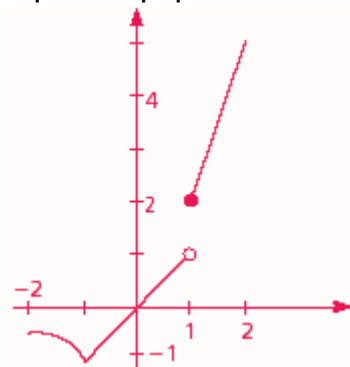


Las funciones que no son pares ni impares no tienen simetrías con respecto a los ejes

Continuidad

Una función $f(x)$ es continua cuando para dibujarla no tengo que levantar el lápiz del papel.

No es continua en $x=1$

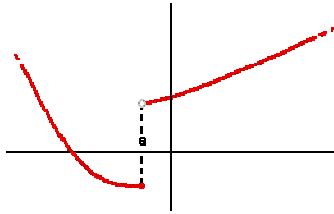


Discontinuidad de salto finito.

Se presentará una discontinuidad de salto finito en un valor $x = a$ cuando en la gráfica observemos una separación o salto entre dos trozos de la función que pueda medirse. Esto es debido a que la tendencia de la función a la

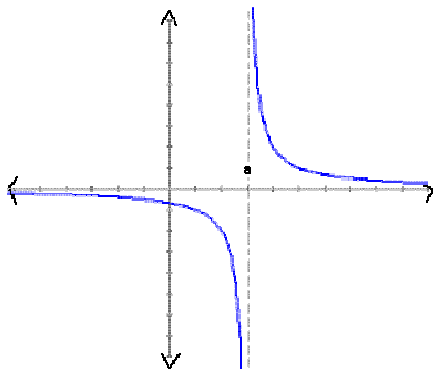
Colegio Antonio de Nebrija
Matemáticas

izquierda del punto $x = a$ es diferente de la que tiene a la derecha.



Discontinuidad de salto infinito.

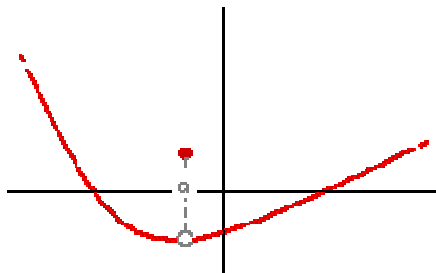
Cuando en un punto de la curva observamos que la tendencia a la izquierda o a la derecha (o ambas) es a alejarse al infinito (más infinito o menos infinito), entonces nos encontramos con una discontinuidad de salto infinito en el punto a .



Discontinuidad evitable.

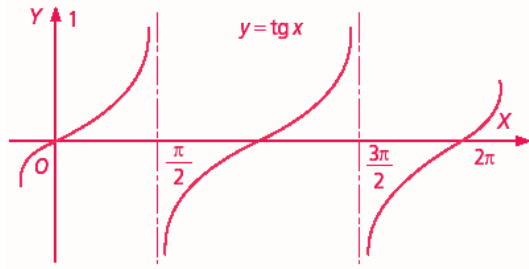
Si nos encontramos que la continuidad de la gráfica se interrumpe en un punto donde no hay imagen, o la imagen está desplazada del resto de la gráfica, tendremos una discontinuidad evitable en el punto a .

Aquí la tendencia de la función a la izquierda de a y a la derecha de a sí coincide, sin embargo es $f(a)$ el valor que no coincide con dicha tendencia o que ni siquiera existe.



Periodicidad

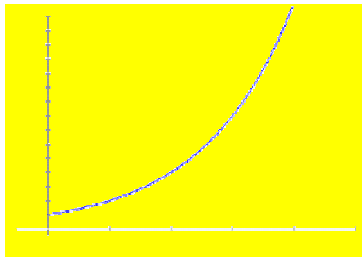
Una función $f(x)$ es periódica si su gráfica se repite cada cierto intervalo, que se denomina periodo, es decir $f(x)=f(x+T)$, siendo T el valor del periodo



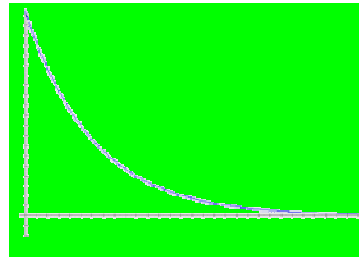
Monotonía (Crecimiento-Decrecimiento)

Dada una función $f(x)$ y dos valores x_1 y x_2 tales que $x_1 < x_2$,

- $f(x)$ será creciente entre x_1 y x_2 si se cumple $f(x_2) - f(x_1) > 0$
- $f(x)$ será decreciente entre x_1 y x_2 si se cumple $f(x_2) - f(x_1) < 0$



Función creciente



Función decreciente

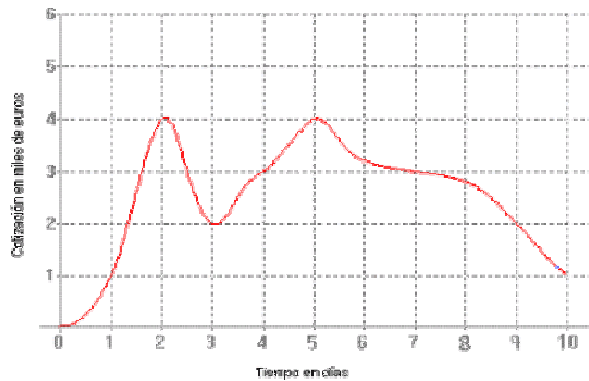
Pero la mayoría de las funciones no van a ser siempre creciente o siempre decreciente, sino todo lo contrario, es decir, que se presentarán como la que se muestra en la gráfica siguiente, que tiene trozos en los que su comportamiento es creciente, y trozos en los que su comportamiento es decreciente.

El estudio del crecimiento-decrecimiento de una función lo haremos por intervalos del dominio, indicando en cuáles es creciente y en cuáles decreciente.

A partir de la gráfica se ve claro el crecimiento-decrecimiento de una manera intuitiva, pero siempre mirándola de izquierda a derecha que es como va aumentando la variable independiente x .

Colegio Antonio de Nebrija

Matemáticas



$f(x)$ es creciente de $0 < x < 2$

$f(x)$ es decreciente de $2 < x < 3$

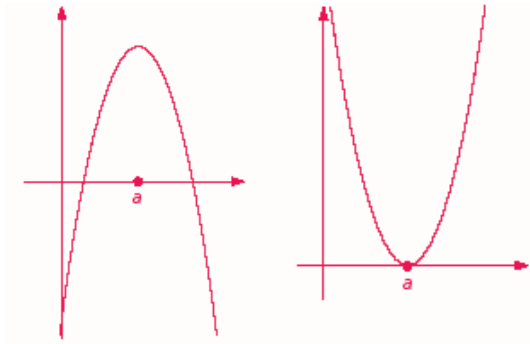
$f(x)$ es creciente de $3 < x < 5$

$f(x)$ es decreciente de $5 < x < 10$

Máximos y Mínimos

Una función $f(x)$ tiene un máximo en un punto $(x=x_0)$ cuando pasa de creciente a decreciente.

Una función $f(x)$ tiene un mínimo en un punto $(x=x_0)$ cuando pasa de decreciente a creciente



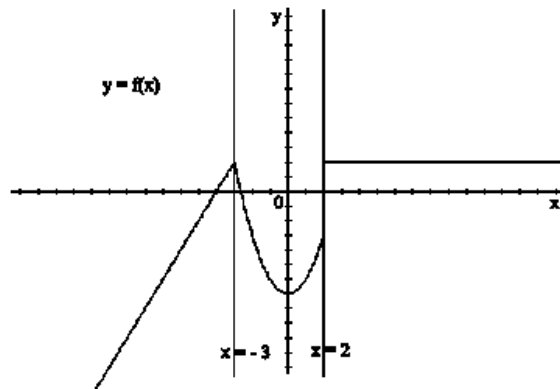
Máximo en $x=a$

Mínimo en $x=a$

TIPOS DE FUNCIONES

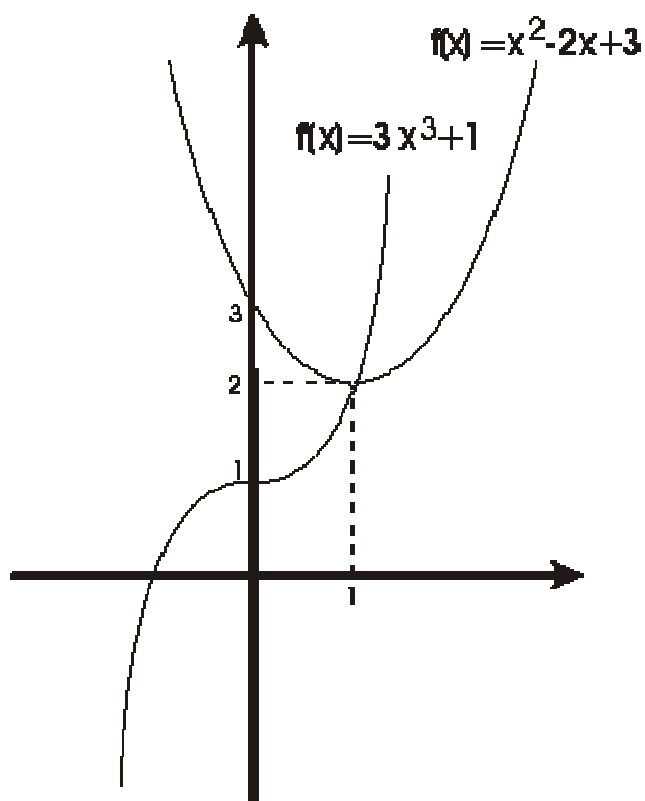
Función a trozos

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 8 & \text{si } x < -3 \\ x^2 - 7 & \text{si } -3 \leq x \leq 2 \\ 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$



Funciones polinómicas

Las funciones polinómicas son continuas en todos los reales



Funciones polinómicas

Funciones racionales

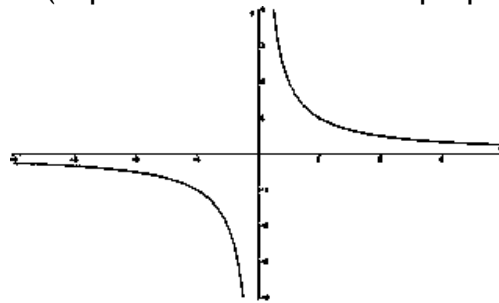
Una función racional es una función que se obtiene como cociente de dos funciones polinómicas:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

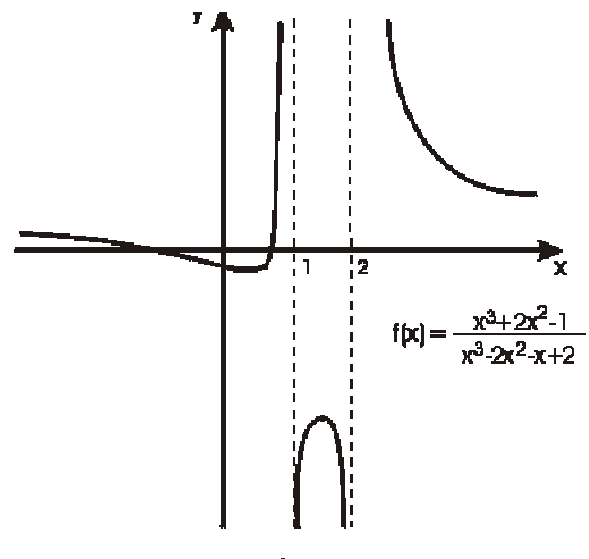
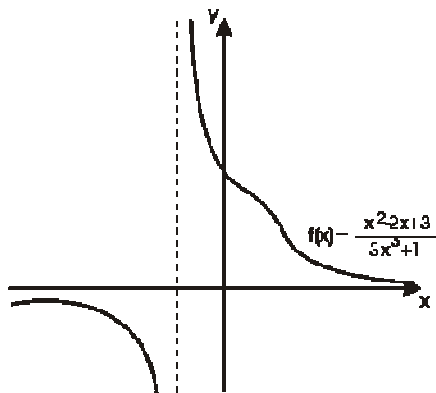
$$x \rightarrow \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m}$$

Una función racional está definida en todo \mathbb{R} excepto en los puntos donde el denominador se anula. En su dominio de definición, las funciones racionales son continuas.

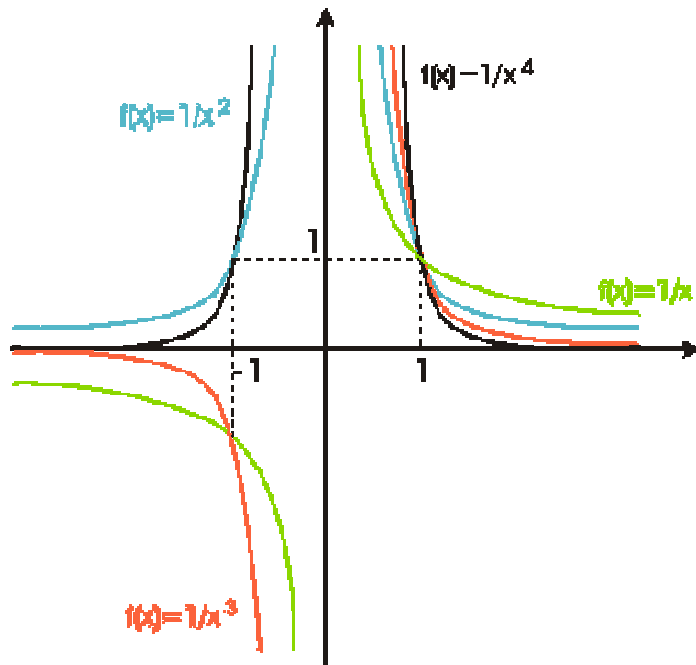
Caso particular $f(x)=1/x$ (expresa la relación de la proporcionalidad inversa)



Otros ejemplos:



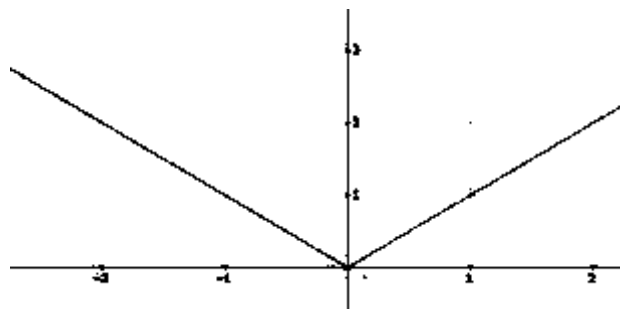
Las siguientes gráficas muestran algunas funciones potencia con exponente negativo; nótese que en el 0 no están definidas.



Funciones potenciales $f(x)=x^{-n}$

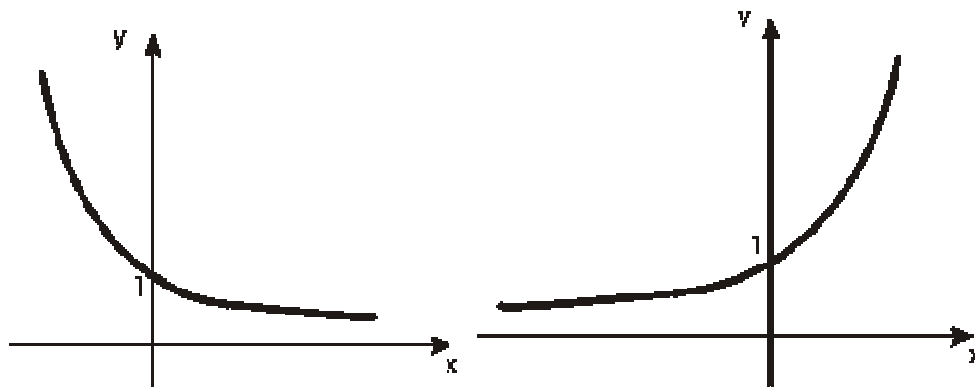
Función valor absoluto

La función valor absoluto, $y = |x| = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$



Función exponencial

Sea a un número real positivo. Se denomina función exponencial a una función de la forma $f(x) = a^x$



Funciones exponenciales: $f(x) = a^x$ ($0 < a < 1$); Funciones exponenciales: $f(x) = a^x$ ($a > 1$);

Propiedades:

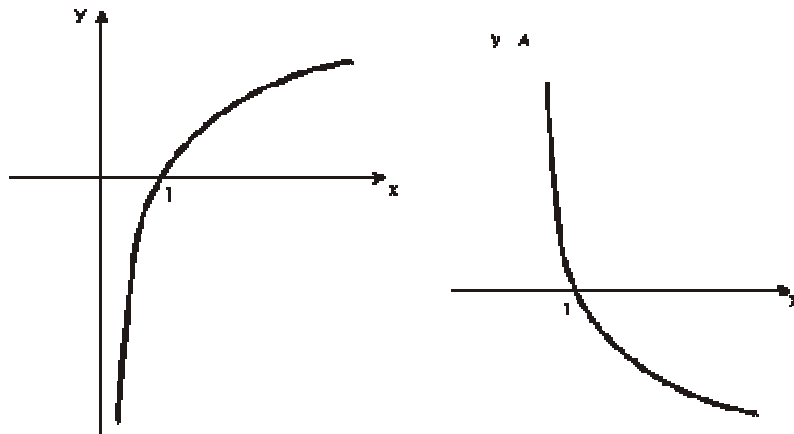
- $D(f(x)) = \mathbb{R}$
- $R(f(x)) = (0, \infty)$
- $a^x > 0$ (es decir positiva) para todo x perteneciente a \mathbb{R} .
- La función exponencial de base $a > 1$ es creciente, mientras que la de base $a < 1$ es decreciente.
- Ambas gráficas cortan al eje y en el punto $(0, 1)$

La función logarítmica

Sea a un número real positivo. Se denomina función logarítmica en base a .
 $f(x) = \log_a x$

Propiedades:

- $D(f(x)) = (0, \infty)$
- $R(f(x)) = \mathbb{R}$
- Si $a > 1$ la función logaritmo correspondiente es creciente
- Si $0 < a < 1$ entonces es decreciente en $(0, \infty)$.
- Ambas gráficas cortan en el eje x en el punto $(1, 0)$

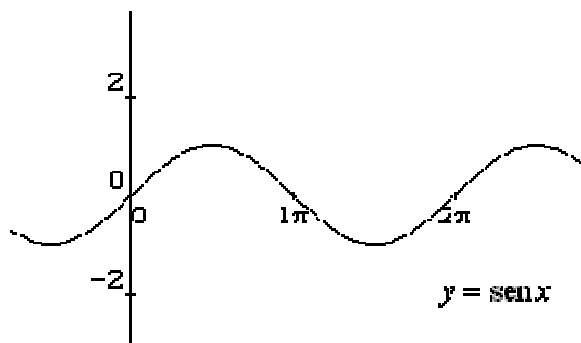


Funciones logarítmicas: $f(x) = \log_e x$ ($a > 1$) Funciones logarítmicas: $f(x) = \log_a x$ ($0 < a < 1$)

Funciones trigonométricas

Función seno

- $D[f(x)] = \mathbb{R}$
- $R[f(x)] = [-1, 1]$
- Continua en todos los reales
- Periódica de periodo 2π
- Tiene simetría impar: $\sin(-x) = -\sin x$
- $f(x)$ es positiva en el intervalo $(0, \pi)$
- $f(x)$ es negativa en el intervalo $(\pi, 2\pi)$
- Puntos de corte con el eje x: $(0, 0); (\pi, 0); (2\pi, 0)$
- $f(x)$ es creciente en $(-\pi/2, \pi/2)$
- $f(x)$ es decreciente en $(\pi/2, 3\pi/2)$

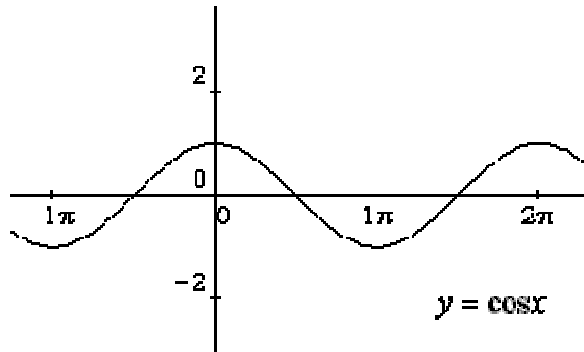


Función coseno

- $D[f(x)] = \mathbb{R}$
- $R[f(x)] = [-1, 1]$
- Continua en todos los reales
- Periódica de periodo 2π
- Tiene simetría par: $\cos(-x) = \cos x$
- $f(x)$ es positiva en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$
- $f(x)$ es negativa en el intervalo $(\pi/2, 3\pi/2)$

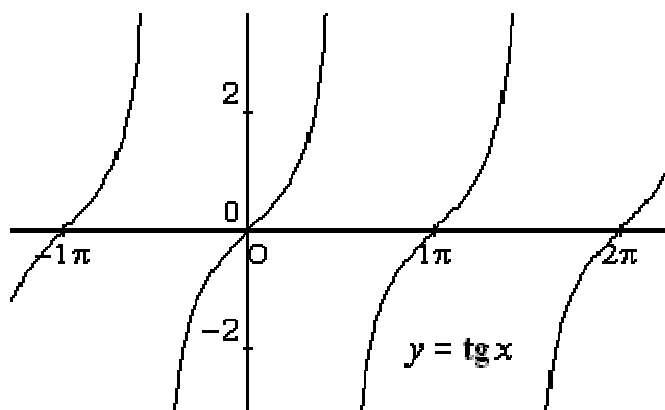
Colegio Antonio de Nebrija
Matemáticas

- Puntos de corte con el eje x: $(\pi/2, 0); (3\pi/2, 0)$
- $f(x)$ es creciente en $(\pi, 2\pi)$
- $f(x)$ es decreciente en $(0, \pi)$



Función tangente

- $D[f(x)] = \mathbb{R} - \{\pi/2 + k\pi\}$ Siendo k un número entero
- $R[f(x)] = \mathbb{R}$
- Discontinua en $x = (2k-1)\pi/2$
- Periódica de periodo π
- Tiene simetría impar: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$
- $f(x)$ es positiva en el intervalo $(0, \pi)$
- $f(x)$ es negativa en el intervalo $(\pi, 2\pi)$
- Puntos de corte con el eje x: $(0, 0); (\pi, 0); (2\pi, 0)$
- $f(x)$ es creciente en $(-\pi/2, \pi/2)$



Hoja de ejercicios de funciones 4º eso

1.-Calcula el dominio de las funciones que se dan a continuación:

a) $f(x) = \frac{x^2}{2x+6}$;

b) $f(x) = \frac{x-2}{x^2-2x-8}$;

c) $y = x^2 - 6x$;

d) $y = \frac{x^2-2x}{2x^2+8}$;

e) $g(x) = \frac{1-x^2}{x^2-x-6}$;

f) $y = \sqrt{x-3}$;

g) $f(x) = \frac{1}{5x-15}$;

h) $f(x) = \sqrt{x+7}$;

i) $h(x) = \frac{3x^2}{x^2-16}$;

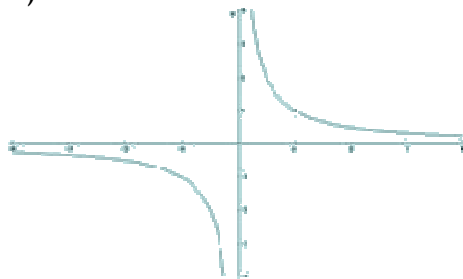
j) $y = \sqrt{x^2+1}$;

k) $t(x) = \sqrt{-x^2+2x+3}$;

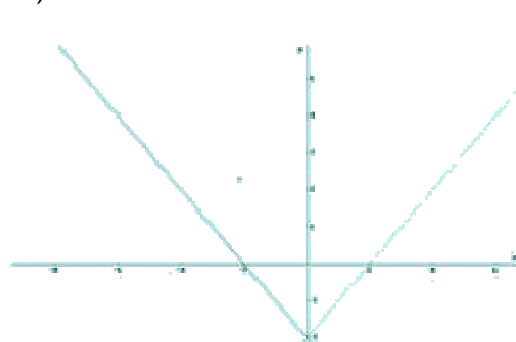
l) $f(x) = \sqrt{x^2-6x}$;

2.-Estudia la continuidad, la monotonía, simetría y los máximos y mínimos.
de las siguientes funciones

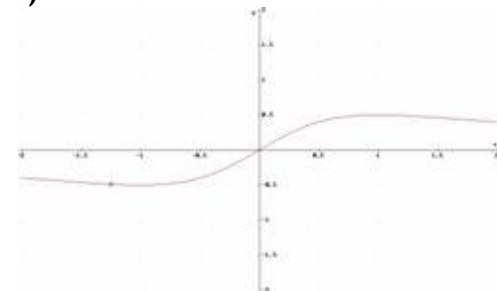
1)



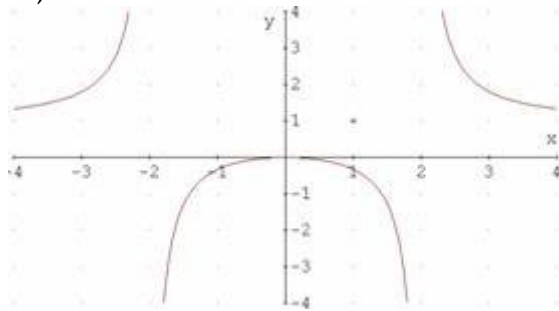
2)



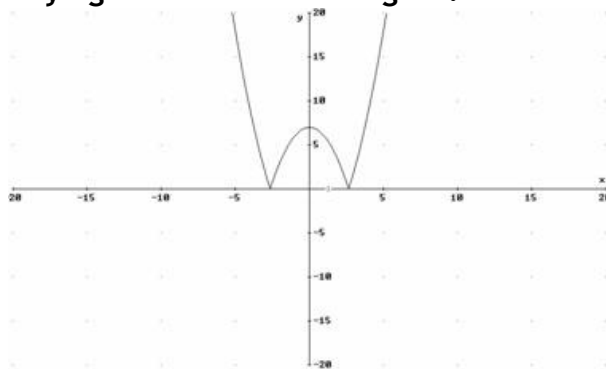
3)



4)



3.- Estudia la monotonía, simetría y los máximos y mínimos de la función cuya gráfica es la de la figura.



4.-Dibuja en el intervalo $[0, 6]$ la función que a cada número positivo le hace corresponder su parte entera.

5.Dadas las siguientes funciones

$$g(x) = \frac{x}{x-1}$$

$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

Calcular:

- $f \circ g(x)$
- $g \circ g(x)$
- $g \circ f(x)$

6. Hallar la función recíproca de

$$f(x) = \frac{2x+1}{2x-1}$$

$$g(x) = \frac{x}{x-1}$$

Colegio Antonio de Nebrija
Matemáticas

7. Hallar la función recíproca de:

$$f(x) = e^{x+3} \qquad g(x) = a^{\frac{x-2}{x+2}} \qquad \text{donde } a > 0$$

8. Hallar la función recíproca de:

$$f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1} \qquad g(x) = \sqrt{x^2 - 1} \qquad h(x) = x^2 + 3x$$