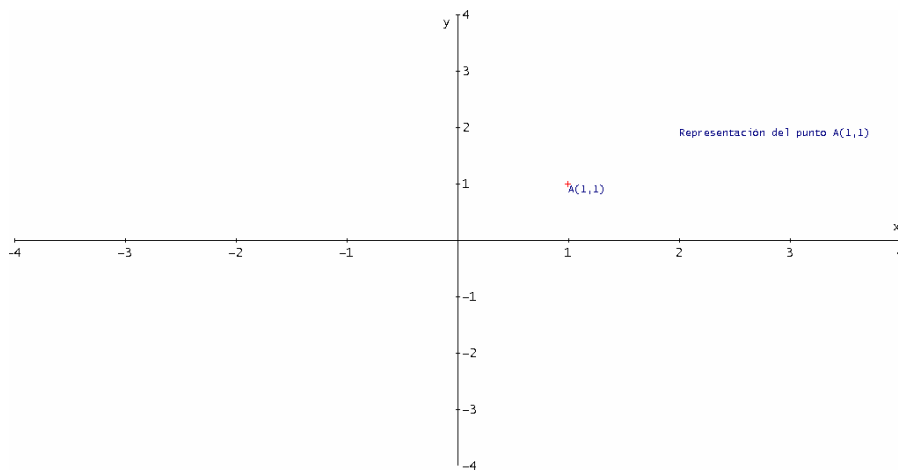


TEMA 8. GEOMETRÍA ANALÍTICA.

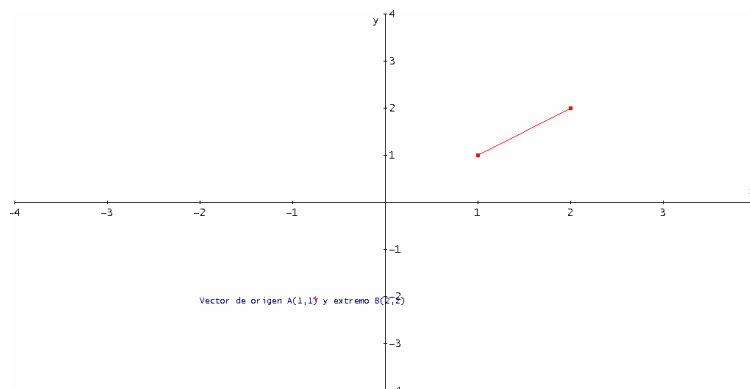
8.1.- El plano.

Definimos el plano euclideo como el conjunto de puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Así, cada punto del plano posee dos coordenadas. Para representar puntos del plano utilizaremos unos ejes coordenados, donde representaremos en el eje X, llamado de abscisas, la primera coordenada del punto, y en el eje Y, llamado de ordenadas, la segunda coordenada del punto.



8.2.- Vectores fijos.

Un vector fijo es un segmento orientado que tiene su origen en el punto A y su extremo en el punto B. El vector se representa por \overrightarrow{AB} .



Sea los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$. El vector \overrightarrow{AB} tendrá por componentes:

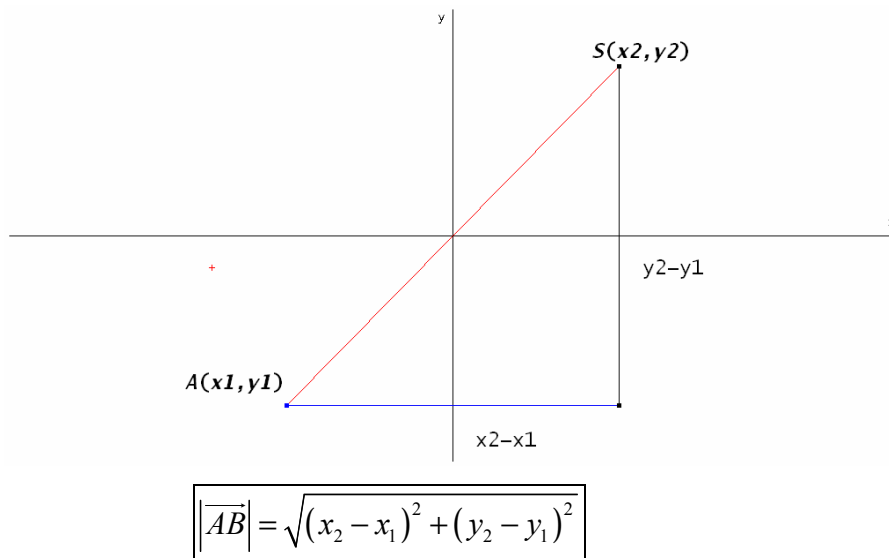
$$\boxed{\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)}$$

- Ejemplo: Sean los puntos $A(1,2)$ y $B(2,-3)$. El vector \overrightarrow{AB} definido por estos dos puntos es: $\overrightarrow{AB} = (2-1, -3-2) = (1, -5)$

8.2.1.- Componentes de un vector.

En todo vector \overrightarrow{AB} se distinguen: módulo, dirección y sentido.

- Módulo: es la longitud del segmento \overline{AB} . Dicho módulo se representa por $|\overline{AB}|$ y se calcula como sigue:



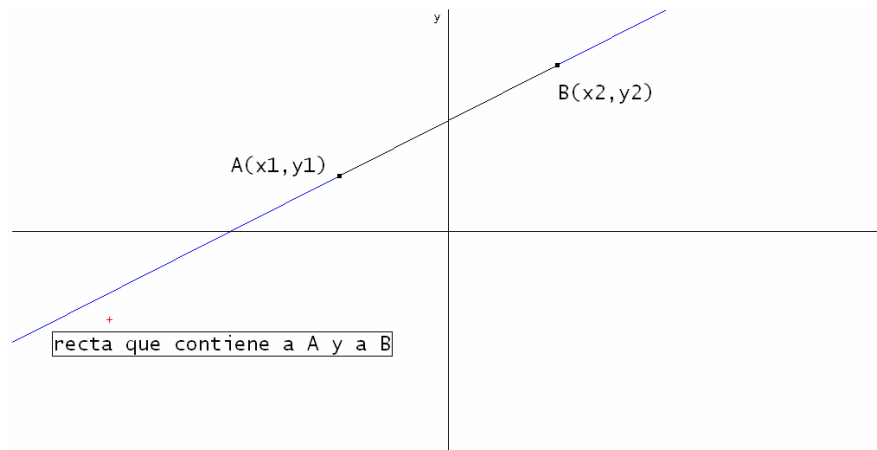
ya que el módulo del vector es la hipotenusa del triángulo rectángulo dibujado. Es decir, el módulo de un vector se calcula utilizando simplemente el teorema de Pitágoras.

- Ejemplo: Sea el vector dado por los puntos $A(-1,0)$ y $B(2,3)$. Calcular su módulo.

El vector así definido es el vector $\overrightarrow{AB} = (3,3)$. Su módulo será:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(2 - (-1))^2 + (3 - 0)^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

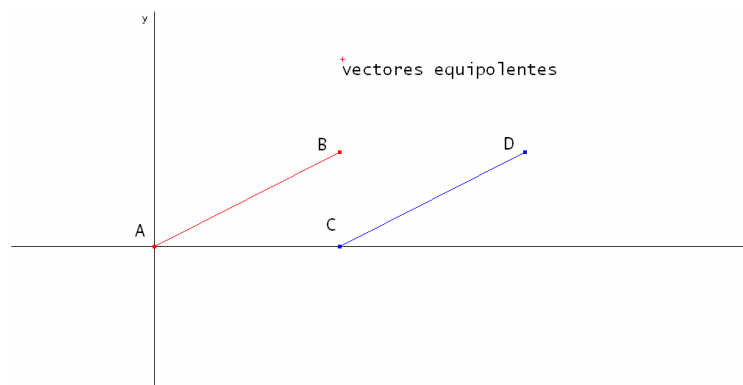
- Dirección: es la dirección de la recta que pasa por A y B y la de todas sus paralelas



- **Sentido:** es el recorrido de la recta cuando nos trasladamos de A hacia B. Hay que tener en cuenta que los vectores \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{BA} no son el mismo vector, ya que tienen el mismo módulo, la misma dirección pero sentido contrario.

8.3.- Vectores libres.

En el plano se pueden definir vectores que tienen el mismo módulo, la misma dirección e igual sentido, diferenciándose únicamente en su origen. Dichos vectores se llaman vectores equipolentes.



Todos los vectores equipolentes entre sí representan a un mismo vector, llamado vector libre.

- **Ejemplo:** El vector dado por $A(0,0)$ y $B(1,1)$ y el vector dado por $C(1,0)$ y $D(2,1)$ son equipolentes. Esto es, \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{CD} son equipolentes, ya que ambos tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido. El vector libre que los representa es el vector $\vec{v} = (1,1)$.

Observación: Hay que notar que al calcular las coordenadas de \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{CD} se obtiene el mismo vector en ambos casos, que es el vector libre $\vec{v} = (1,1)$.

8.4.- Operaciones con vectores.

De igual modo que entre los elementos (números) pertenecientes a un determinado conjunto se pueden definir operaciones como la suma o el producto, entre los vectores libres definiremos una serie de operaciones.

8.4.1.- Suma de vectores.

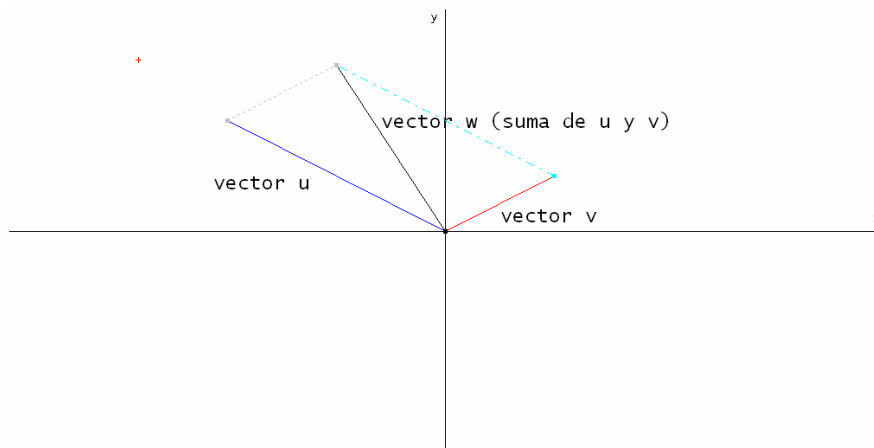
La suma de dos ó más vectores es otro vector, cuyas componentes resultan de sumar las componentes de los vectores dados. Es decir, dados dos vectores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ y

$\vec{v} = (x_2, y_2)$, la suma de ambos es otro vector \vec{w} tal que:

$$\vec{w} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

- Ejemplo: Sean los vectores $\vec{u} = (2, 1)$ y $\vec{v} = (-1, 2)$, la suma de ambos da como resultado el vector $\vec{w} = (2 + (-1), 1 + 2) = (1, 3)$.

Para sumar gráficamente dos vectores, los representaremos con el mismo origen y trazaremos paralelas a ambos vectores. Una vez hecho esto, trazaremos la diagonal del paralelogramo obtenido, que será el vector suma. Dicha regla es conocida como regla del paralelogramo para la suma de vectores.



De forma análoga se define la resta de vectores. Sean dos vectores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ y

$\vec{v} = (x_2, y_2)$, la diferencia de ambos es otro vector \vec{w} tal que:

$$\vec{w} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$$

- Ejemplo: Sean los vectores $\vec{u} = (2, 1)$ y $\vec{v} = (-1, 2)$, la suma de ambos da como resultado el vector $\vec{w} = (2 - (-1), 1 - 2) = (3, -1)$.

8.4.2.- Producto de un escalar (número) por un vector.

El producto de un escalar (un número) λ por un vector \vec{v} es otro vector con la misma dirección de \vec{v} , el mismo sentido si λ es positivo y sentido contrario si λ es negativo y de módulo $|\lambda| \cdot |\vec{v}|$. Las componentes del vector resultante se obtienen como sigue:

dado un vector $\vec{v} = (x_1, y_1)$ y un número λ , se tiene que

$$\lambda \cdot \vec{v} = \lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1)$$

- Ejemplo: Sea un vector $\vec{v} = (-2, 3)$ y el número 2. El producto de 2 por el vector $\vec{v} = (-2, 3)$ será el vector $\vec{w} = 2 \cdot \vec{v} = 2(-2, 3) = (2 \cdot (-2), 2 \cdot 3) = (-4, 6)$.

Si consideramos ahora el número -2, el producto será el vector

$$\vec{x} = (-2) \cdot \vec{v} = (-2)(-2, 3) = ((-2) \cdot (-2), (-2) \cdot 3) = (4, -6)$$

que como se puede observar tiene el mismo módulo, la misma dirección y sentido contrario a \vec{w} .

Observación: Si se multiplica un vector por el número 0 se obtiene el vector $\vec{0} = (0, 0)$.

8.5.- Combinación lineal de vectores.

Dados dos vectores \vec{u} y \vec{v} y dos escalares (números) α y β , una combinación lineal de \vec{u} y \vec{v} es el vector: $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$

- Ejemplo: Sean los vectores $\vec{u} = (1, 2)$ y $\vec{v} = (0, -1)$. Cualesquiera que sean α y β , una combinación lineal de \vec{u} y \vec{v} es $\alpha(1, 2) + \beta(0, -1)$.

Observación: Podemos generalizar este concepto para cualquier conjunto de n vectores. Así, una combinación lineal de los vectores $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3, \dots$ es el vector

$$a_1 \vec{\alpha}_1 + a_2 \vec{\alpha}_2 + a_3 \vec{\alpha}_3 + \dots$$

para $a_1, a_2, a_3, \dots \in \mathbb{R}$.

8.5.1.- Vectores linealmente dependientes.

Diremos que tres vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ son linealmente dependientes si existen dos escalares a, b, tal que $\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$.

- Ejemplo: Sean los vectores $\vec{u} = (1, 0)$, $\vec{v} = (0, 1)$, $\vec{w} = (-2, 3)$. Estos tres vectores son linealmente dependientes, ya que existen $a = -2$, $b = 3$, tal que:

$$\vec{w} = -2\vec{u} + 3\vec{v}$$

Todo vector que se puede expresar como combinación lineal de dos o más vectores se dice que depende linealmente de éstos.

- Ejemplo: El vector $\vec{z} = (2, 1)$, ¿se puede expresar como **combinación lineal** de los vectores $\vec{x} = (3, -2)$ e $\vec{y} = (1, 4)$?

Para comprobarlo hemos de plantear la definición de dependencia lineal de vectores. Así, hemos de comprobar si existen a y b tales que:

$$\vec{z} = a\vec{x} + b\vec{y}$$

Esto es,

$$(2, 1) = a(3, -2) + b(1, 4) = (3a, -2a) + (b, 4b) = (3a + b, -2a + 4b)$$

igualando componente a componente se tiene que:

$$\begin{cases} 2 = 3a + b \\ 1 = -2a + 4b \end{cases}$$

Al resolver el sistema se obtiene que $a = \frac{1}{2}$ y $b = \frac{1}{2}$, con lo cual el vector \vec{z} se puede expresar como combinación lineal de los vectores \vec{x} e \vec{y} . De la misma forma diremos que el vector \vec{z} depende linealmente de los vectores \vec{x} e \vec{y} .

8.5.2.- Vectores linealmente independientes.

Diremos que tres vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ son linealmente independientes si no existen dos escalares a, b , tal que $\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$.

- Ejemplo: Sean los vectores $\vec{u} = (1, 0)$, $\vec{v} = (2, 0)$, $\vec{w} = (-2, 3)$. Estos tres vectores son linealmente independientes, ya que no existe ningún par de números a, b , tal que:

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$$

8.6.- Producto escalar de vectores.

Dados dos vectores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ y $\vec{v} = (x_2, y_2)$. El producto escalar de estos dos vectores da como resultado un escalar (número). El producto escalar de estos dos vectores se define como:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

- Ejemplo: Sean los vectores $\vec{u} = (-1, 2)$ y $\vec{v} = (2, -2)$. El producto escalar de ambos es:

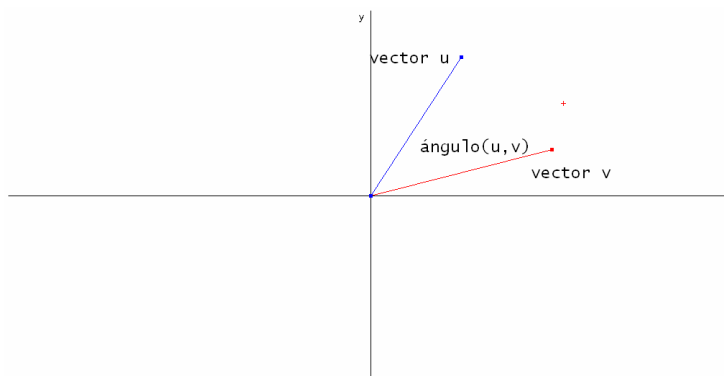
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-1) \cdot 2 + 2 \cdot (-2) = -2 - 4 = -6$$

Observación: El producto escalar se denota mediante el símbolo \cdot y como hemos dicho da como resultado un escalar (número). Es importante señalarlo, ya que en el espacio de tres dimensiones se define otro tipo de producto, denominado producto vectorial, cuyo resultado es otro vector, y viene denotado por \times . Esto último no entra dentro de nuestro temario.

El producto escalar de dos vectores también se puede definir como sigue:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

donde el $\cos(\vec{u}, \vec{v})$ es el coseno del ángulo formado por los vectores \vec{u} y \vec{v} , mientras que $|\vec{u}|$ y $|\vec{v}|$ son los módulos de los vectores \vec{u} y \vec{v} , respectivamente.



De esta manera, es posible conocer el ángulo que forman dos vectores a partir de sus expresiones, ya que tenemos que:

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

- Ejemplo: Sean los vectores $\vec{u} = (-1, 2)$ y $\vec{v} = (2, -2)$. El ángulo formado por estos dos vectores es:

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{-2 - 4}{\sqrt{5} \sqrt{8}} = \frac{-6}{\sqrt{40}} \approx -0.95$$

con lo cual el ángulo formado por estos dos vectores es: $\alpha \approx 161'57''$.

A continuación vamos a definir tres tipos especiales de vectores, de vital importancia en geometría, así como en otras ramas de la Ciencia como la Física o la Ingeniería.

- **Vectores ortogonales:** Dos vectores \vec{a} y \vec{b} son **ortogonales** cuando son perpendiculares, esto es, cuando forman un ángulo de 90° . Matemáticamente definimos esto como sigue:

\vec{a} y \vec{b} son ortogonales cuando $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

- **Vectores unitarios:** Un vector \vec{a} es **unitario** cuando tiene módulo 1, es decir: \vec{a} es unitario cuando $|\vec{a}| = 1$

- **Vectores ortonormales:** Dos vectores \vec{a} y \vec{b} son **ortonormales** cuando son ortogonales y unitarios. Es decir:

\vec{a} y \vec{b} son ortonormales cuando $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ y $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 1$

8.7.- **Distancia entre dos puntos.**

Sean $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$ dos puntos del plano (\mathbb{R}^2). Se define la distancia entre estos dos puntos como el módulo del vector \overrightarrow{AB} , es decir:

$$d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

- Ejemplo: Sean los puntos del plano $A(2, -1)$ y $B(-1, 3)$. Las distancias entre estos dos puntos viene dada por:

$$d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (3 - (-1))^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

8.8.- **Punto medio de un segmento.**

El segmento determinado por dos puntos $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$, del plano se denota por \overline{AB} . El punto medio de este segmento viene dado por el punto de coordenadas:

$$M = \frac{A+B}{2} = \left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2} \right)$$

- Ejemplo: Sean los puntos del plano $A(2, -1)$ y $B(-1, 3)$. El punto medio del segmento \overline{AB} es el punto:

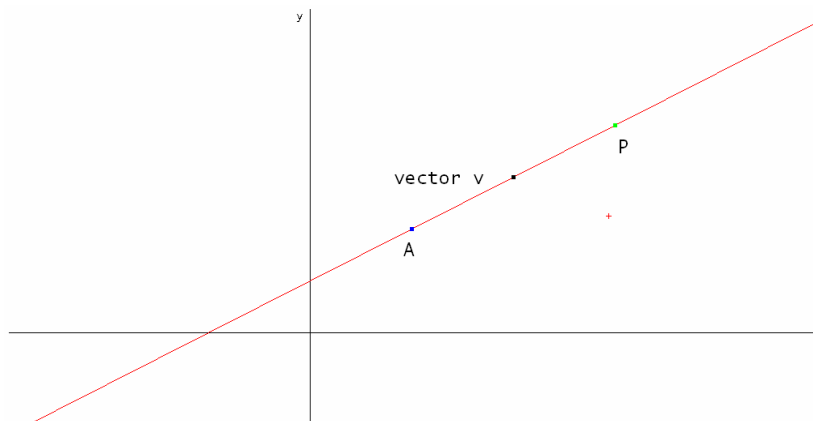
$$M = \frac{A+B}{2} = \left(\frac{2+(-1)}{2}, \frac{-1+3}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}, 1 \right)$$

8.9.- Ecuación de la recta.

En este punto vamos a obtener la ecuación de una recta r en sus distintas modalidades. Los conceptos que se van a exponer son puramente deductivos por lo que es importante que se vayan asumiendo todos y cada uno de los pasos que se van sucediendo.

8.9.1.- Ecuación vectorial de la recta.

Sea r la recta que pasa por el punto A y tiene dirección el vector \vec{v} . Vamos a calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(a_1, a_2)$ y tiene por vector director (el vector que da dirección a la recta) a $\vec{v} = (v_1, v_2)$. Sea $P(x, y)$ un punto genérico de dicha recta



\overrightarrow{AP} y \vec{v} tienen la misma dirección, ya que $\overrightarrow{AP} = t\vec{v}$, con $t \in \mathbb{R}$ (es decir, un número real). Así,

$$P - A = t\vec{v} \rightarrow P = A + t\vec{v} \rightarrow (x, y) = (a_1, a_2) + t(v_1, v_2)$$

Con lo cual, la ecuación de la recta r es:

$$(x, y) = (a_1, a_2) + t(v_1, v_2)$$

Esta ecuación se llama ecuación vectorial de la recta.

8.9.2.- Ecuaciones paramétricas de la recta.

Partiendo de la ecuación vectorial de la recta y , descomponiendo por componentes obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta r :

$$\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \end{cases}$$

8.9.3.- Ecuación continua de la recta.

Partiendo de las ecuaciones paramétricas, despejamos en ambas el parámetro t :

$$t = \frac{x - a_1}{v_1} \quad \text{e igualando ambas expresiones resulta:}$$

$$t = \frac{y - a_2}{v_2}$$

$$\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2}$$

que es la ecuación continua de la recta r .

8.9.4.- Ecuación punto pendiente.

Trabajando con la ecuación continua se tiene:

$$\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2} \rightarrow v_2(x - a_1) = v_1(y - a_2) \rightarrow y - a_2 = \frac{v_2}{v_1}(x - a_1), \text{ donde llamando}$$

$m = \frac{v_2}{v_1}$ a la pendiente, la ecuación punto pendiente de la recta r es:

$$y - a_2 = m(x - a_1)$$

8.9.5.- Ecuación explícita de la recta.

A partir de la ecuación punto pendiente y , despejando y , obtenemos:

$$y = mx + a_2 - ma_1 \rightarrow y = mx + n$$

donde $m = \frac{v_2}{v_1}$ es la **pendiente** de la recta, mientras que $n = a_2 - ma_1$ es la **ordenada**

en el origen, que es el punto en el que la recta corta el eje Y . Así, la ecuación explícita de la recta es:

$$y = mx + n$$

8.9.6.- Ecuación general de la recta.

Trabajando con la ecuación continua de la recta tenemos:

$$v_2(x - a_1) = v_1(y - a_2) \rightarrow v_2x - v_2a_1 = v_1y - v_1a_2 \rightarrow v_2x - v_1y + v_1a_2 - v_2a_1 = 0$$

y llamando $A = v_2$, $B = -v_1$ y $C = v_1a_2 - v_2a_1$ se tiene la ecuación general de la recta r:

$$Ax + By + C = 0$$

- Ejemplo:

Sea el punto $A(-2, 4)$ y el vector $\vec{v} = (3, -1)$. Vamos a obtener la ecuación de la recta r, que pasa por A y tiene por vector director a \vec{v} . La ecuación vectorial viene dada por:

$$(x, y) = (-2, 4) + t(3, -1)$$

De aquí deducimos la **ecuación paramétrica**:

$$\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 4 - t \end{cases}$$

Operando llegamos a:

$$\begin{cases} t = \frac{x+2}{3} \\ t = 4 - y \end{cases}$$

e igualando obtenemos la **ecuación continua**:

$$\frac{x+2}{3} = 4 - y$$

Si trabajamos con la forma de la **ecuación punto pendiente** tendremos:

$$y - 4 = -\frac{1}{3}(x + 2)$$

donde observamos que la pendiente es $m = -\frac{1}{3}$.

La **ecuación explícita** de la recta será:

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$$

Y finalmente, operando y simplificando llegamos a la **ecuación general** de la recta:

$$y - 4 = -\frac{1}{3}(x + 2) \rightarrow y - 4 = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3} \rightarrow y + \frac{1}{3}x - 4 + \frac{2}{3} = 0 \rightarrow y + \frac{1}{3}x - \frac{10}{3} = 0$$

Observación: Todas las expresiones de la ecuación de una recta son iguales, es decir, expresan la misma información. Lo único que varía es la forma en la que esta viene

expresada. Usaremos una u otra forma en función de la información de que dispongamos y de lo que se pida en cada momento.

8.10.- Posiciones relativas de dos rectas en el plano.

Sean

$$r \equiv Ax + By + c = 0$$

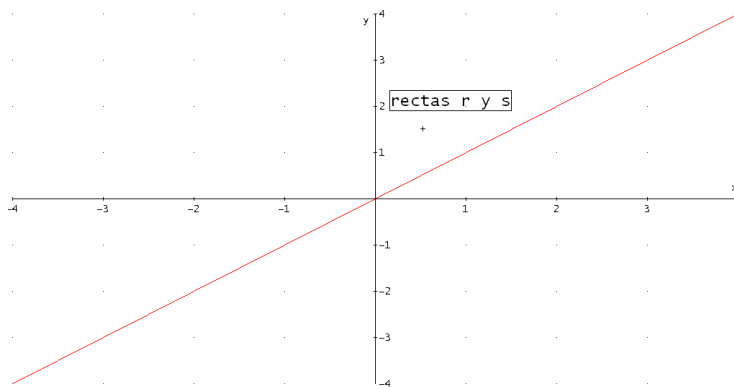
$$s \equiv A'x + B'y + C' = 0$$

dos rectas del plano euclideo. Estas dos rectas pueden tener las siguientes posiciones relativas:

- **Coincidentes:**

Ambas rectas son la misma. Esto ocurrirá cuando:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$$



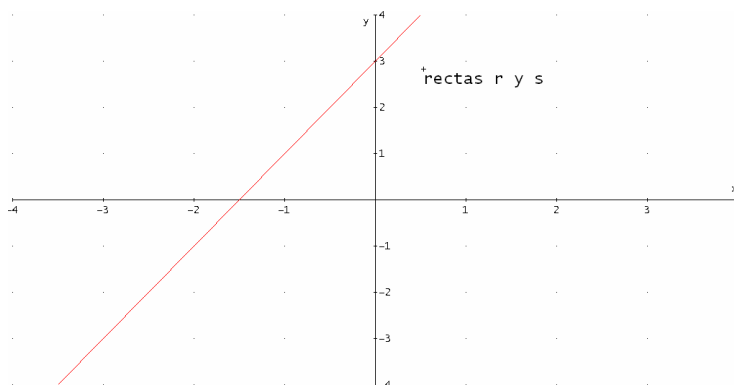
- **Ejemplo:**

Las rectas

$$r \equiv 2x - y + 3 = 0$$

$$s \equiv -4x + 2y - 6 = 0$$

son rectas coincidentes.



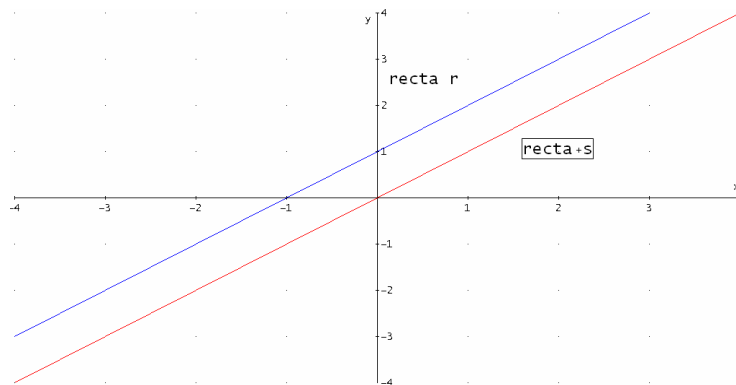
Tema 8. Geometría Analítica.

Hay que notar que dos rectas coincidentes poseen infinitos puntos en común. Cuando se resuelve el sistema de ecuaciones dado por estas dos rectas, resulta ser un sistema con infinitas soluciones, es decir, un sistema compatible indeterminado.

- Paralelas:

Dos rectas paralelas cumplen que:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$$



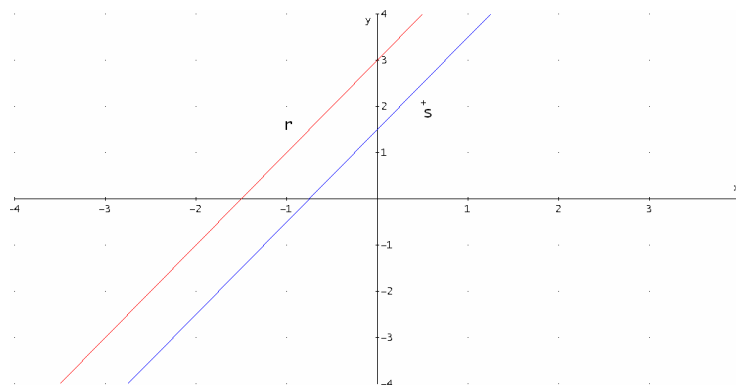
- Ejemplo:

Las rectas

$$r \equiv 2x - y + 3$$

$$s \equiv -4x + 2y - 3$$

son rectas paralelas.

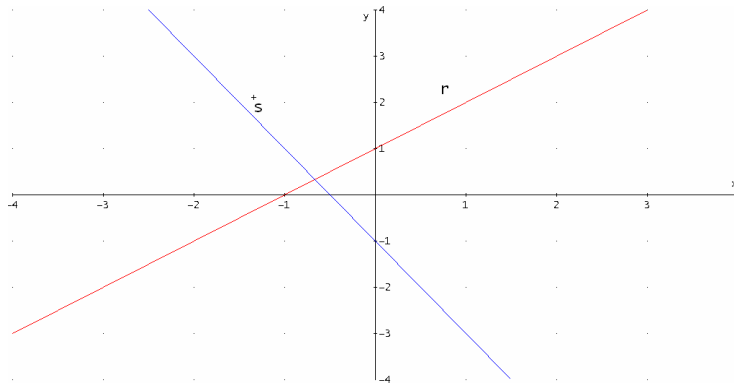


Dos rectas paralelas no tienen ningún punto en común, con lo cual, al resolver el sistema de ecuaciones determinado por éstas, este resulta ser un sistema compatible indeterminado (sin solución).

- **Secantes:**

Dos rectas secantes son aquellas que se cortan en un (**único**) punto. Esto ocurrirá cuando:

$$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$$



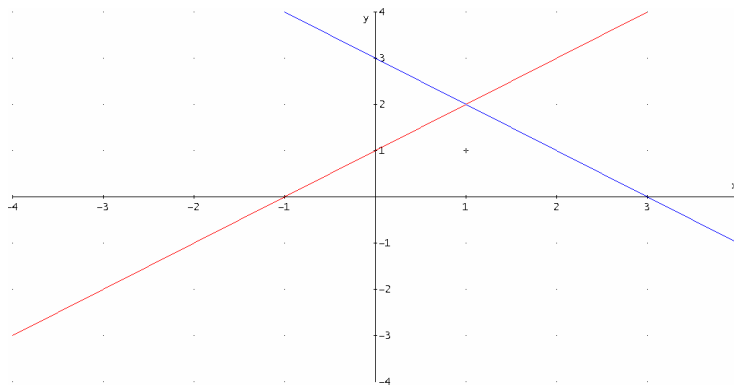
- **Ejemplo:**

Las rectas

$$r \equiv x - y - 1$$

$$s \equiv y + x - 3$$

son rectas secantes que se intersectan en el punto $(2, 2)$.



Para determinar el punto donde las rectas se cortan se ha de resolver el sistema de ecuaciones determinado por ambas, que resulta ser un sistema compatible determinado (con solución única). Esto es así debido a que dos rectas secantes en el plano sólo tienen un punto de contacto, lo que no ocurriría, por ejemplo, sobre la superficie de una esfera.