

12 FUNCIONES

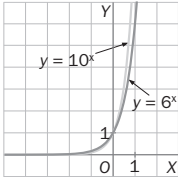
EJERCICIOS PROPUESTOS

12.1 Representa las siguientes funciones.

a) $y = 6^x$ b) $y = 10^x$

¿Tienen algún punto en común?

¿Cuál crece más rápidamente?



El $(0, 1)$ es el único punto que tienen en común.

Crece más rápidamente $y = 10^x$.

12.2 Una planta se reproduce por bipartición cada dos días. Si el ritmo de reproducción se mantuviera indefinidamente, ¿cuántas plantas habría dentro de 40 días? ¿Cuál sería la función exponencial que se ajusta a este fenómeno?

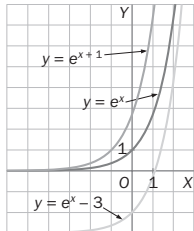
Si llamamos x a los días transcurridos e y al número de plantas, se tiene la siguiente tabla de valores:

x	0	1	2	3	4	5	6
y	1	2	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6

Por lo que al cabo de 40 días habrá 2^{40} plantas.

La función exponencial que se ajusta a este fenómeno es $y = 2^x$.

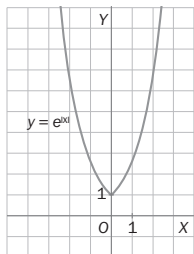
12.3 Representa gráficamente las funciones $y = e^{x+1}$ e $y = e^x - 3$ a partir de la función $y = e^x$. Explica el procedimiento que has seguido.



• $y = e^{x+1}$. Trasladamos la función $y = e^x$ horizontalmente a la izquierda una unidad.

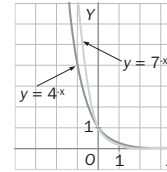
• $y = e^x - 3$. Trasladamos la función $y = e^x$ tres unidades hacia abajo.

12.4 Representa gráficamente $y = e^{|x|}$ a partir de $y = e^x$.



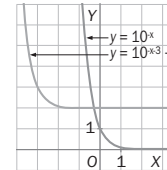
$$y = e^{|x|} = \begin{cases} e^x & \text{si } x > 0 \\ e^{-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

12.5 Representa las funciones $y = 4^{-x}$ e $y = 7^{-x}$ en los mismos ejes. ¿Tienen algún punto en común?



El punto $(0, 1)$ es el único punto en común.

12.6 A partir de la gráfica de $y = 10^{-x}$ representa la gráfica de la función $y = 10^{-x-3} + 2$.

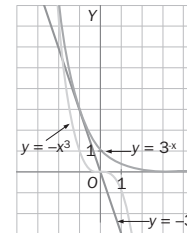


Trasladamos la gráfica $y = 10^{-x}$ tres unidades horizontalmente hacia la izquierda y dos unidades verticalmente hacia arriba.

12.7 Representa gráficamente estas funciones.

$y = -3x$; $y = -x^3$; $y = 3^{-x}$

Compara el decrecimiento de las tres funciones para valores suficientemente grandes de la variable x .



Para x suficientemente grandes, la función exponencial tiende a cero, al tener el exponente negativo, por lo que la función de mayor decrecimiento es la potencial.

12.8 Un arrecife tarda 20 años, aproximadamente, en duplicar la cantidad de coral que contiene.

Escribe la expresión algebraica que expresa la cantidad de coral que hay en el arrecife al cabo de t años.

Si llamamos x a la cantidad de coral que hay inicialmente en el arrecife, la expresión que permite calcular la cantidad de arrecife al cabo de t años es $y(t) = x \cdot 2^{t/20}$.

12.9 La población de una ciudad está formada por cuatro millones de habitantes y su tasa de crecimiento es del 1,5%. Si permanece del mismo modo durante los 10 años siguientes, ¿cuántos habitantes se espera que tenga la ciudad para entonces?

La ecuación exponencial que proporciona el crecimiento de la población es $P(t) = 4\,000\,000 \cdot (1 + 0,015)^t$.

Donde $P(t)$ indica los habitantes que tendrá al cabo de t años.

Para $t = 10$, se tiene $P(10) = 4\,000\,000 \cdot (1 + 0,015)^{10} = 4\,642\,163$ habitantes.

12.10 Un cubito de hielo de 2 cm^3 se introduce en un vaso de agua. Cada minuto que pasa, el 10% de su volumen se transforma en agua líquida. ¿Qué cantidad de hielo quedará al cabo de 10 minutos?

La ecuación exponencial que proporciona la cantidad de hielo que queda en el vaso es $H(t) = 2 \cdot (1 - 0,10)^t$.

Donde $H(t)$ indica el hielo que quedará al cabo de t minutos.

Para $t = 10$, se tiene: $H(10) = 2 \cdot (1 - 0,10)^{10} = 0,697 \text{ cm}^3$.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

- 12.11** En 2007, la población del continente africano era de $9,624 \cdot 10^8$ habitantes, aproximadamente, con una tasa de crecimiento anual del 2,86%. Si se mantiene este ritmo de crecimiento, ¿cuánto tiempo ha de pasar para que llegue a los mil millones de habitantes?

La ecuación exponencial que proporciona el crecimiento de la población es $P(t) = 9,624 \cdot 10^8 \cdot (1 + 0,0286)^t$.

Donde $P(t)$ indica los habitantes que tendrá al cabo de t años.

Para $P(t) = 10^9$, se tiene: $10^9 = 9,624 \cdot 10^8 \cdot (1 + 0,0286)^t$.

Para resolver esta ecuación exponencial se construye una tabla de valores:

Tiempo (años)	N.º de habitantes	La solución debe ser
1	9 899 246 400	Mayor
2	10 182 364 850	Menor

Deben pasar casi 2 años.

- 12.12** Una bacteria se divide en dos cada 15 minutos. Partiendo de un cultivo con 12 bacterias, hemos conseguido más de un billón. ¿Cuánto tiempo ha sido necesario?

La ecuación exponencial que proporciona el número de bacterias que hay en el cultivo es $B(t) = 12 \cdot 2^{\frac{t}{15}}$.

Donde $B(t)$ indica el número de bacterias que habrá al cabo de t minutos. Para $B(t) = 10^{12}$, se tiene: $10^{12} = 12 \cdot 2^{\frac{t}{15}}$.

Para resolver esta ecuación exponencial se construye una tabla de valores:

Tiempo (minutos)	N.º de bacterias	Solución	Tiempo (minutos)	N.º de bacterias	Solución
500	129 871 672 900	Mayor	540	824 633 720 800	Mayor
600	13 194 139 530 000	Menor	545	1 038 973 383 000	Menor
550	1 309 024 436 000	Menor	544	992 055 011 800	Mayor

Deben transcurrir entre 544 y 545 minutos. Es decir, entre 9 horas y 4 minutos y 9 horas y 5 minutos.

ACTIVIDADES

EJERCICIOS PARA ENTRETENERSE

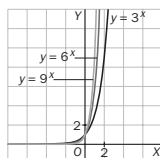
Funciones exponenciales

- 12.13** Representa en los mismos ejes de coordenadas las siguientes funciones:

$$f(x) = 3^x$$

$$g(x) = 6^x$$

$$h(x) = 9^x$$



- 12.14** Identifica, de entre las siguientes funciones, las que sean exponenciales:

a) $y = 5^{2x}$ b) $y = 4^{-x}$ c) $y = x^0$ d) $y = 3x$ e) $y = x^6$ f) $y = \left(\frac{5}{7}\right)^x$

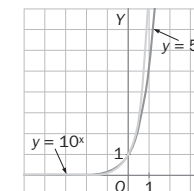
Son exponenciales las funciones de los apartados a, b y f.

- 12.15** Construye una tabla de valores para las funciones $f(x) = 5^x$ y $g(x) = 10^x$, y represéntalas gráficamente en los mismos ejes de coordenadas.

- a) ¿Son crecientes o decrecientes?
b) ¿Cuál de las dos crece más rápidamente?
c) ¿Se cortan en algún punto?

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	0,04	0,2	1	5	25

x	-2	-1	0	1	2
g(x)	0,01	0,1	1	10	100



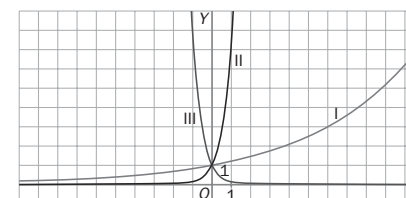
- a) Las dos funciones son crecientes.
b) Crece más rápidamente $g(x)$.
c) Sí, en (0, 1).

- 12.16** Relaciona cada gráfica con la fórmula que le corresponde:

$$f(x) = \left(\frac{1}{8}\right)^x$$

$$g(x) = 1,2^x$$

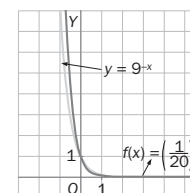
$$h(x) = 7,5^x$$



I con g; II con h; III con f

- 12.17** Dibuja la gráfica de las funciones $f(x) = \left(\frac{1}{20}\right)^x$ y $g(x) = 9^{-x}$, y contesta a las siguientes cuestiones.

- a) Calcula el recorrido de cada una de ellas.
b) ¿Son crecientes o decrecientes?
c) ¿En cuál de las dos se produce una variación más rápida en su crecimiento?



- a) $\text{Rec } f(x) = \text{Rec } g(x) = \mathbb{R}^+$
b) Las dos funciones son decrecientes.
c) Varía más rápidamente su crecimiento $f(x)$.

- 12.18** Para cada uno de los casos siguientes, escribe la expresión algebraica de una función exponencial.

- a) La función es decreciente. c) Crece más rápidamente que $y = 4,3^x$.
b) La función es creciente. d) Decece más rápidamente que $y = 0,5^x$.
e) $y = 5^{-x}$. f) $y = 10^x$.
g) $y = 25^x$. h) $y = 0,05^x$.

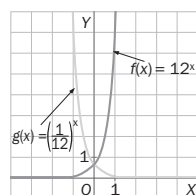
12.19 Indica, sin dibujarlas, si las siguientes funciones son crecientes o decrecientes.

a) $y = \left(\frac{1}{6}\right)^x$ b) $y = 7^x$ c) $y = 5^{-x}$ d) $y = \left(\frac{5}{2}\right)^x$

a) Decreciente b) Creciente c) Decreciente d) Creciente

12.20 Dibuja la gráfica de las funciones $f(x) = 12^x$ y $g(x) = \left(\frac{1}{12}\right)^x$, y responde a las siguientes preguntas.

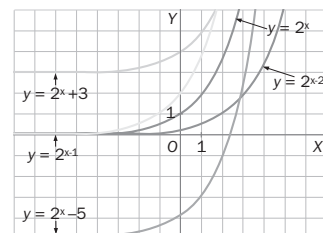
- a) ¿Tienen el mismo dominio y recorrido?
b) ¿Cómo es su crecimiento?
c) ¿Tienen los mismos puntos de corte con los ejes?
d) Observando la gráfica, ¿qué se puede decir de la simetría de estas funciones?



- a) $\text{Dom } f(x) = \text{Dom } g(x) = \mathbb{R}$
 $\text{Rec } f(x) = \text{Rec } g(x) = \mathbb{R}^+$
b) $f(x)$ es creciente y $g(x)$ es decreciente.
c) Sí, el punto $(0, 1)$
d) Son simétricas respecto al eje de ordenadas.

12.21 A partir de la gráfica de la función $y = 2^x$ representa, mediante traslaciones, las funciones:

a) $y = 2^x + 3$ b) $y = 2^x - 5$ c) $y = 2^{x+1}$ d) $y = 2^{x-2}$

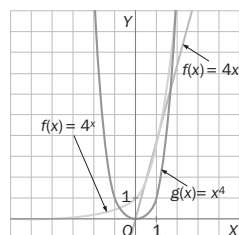


- a) Se traslada la función $y = 2^x$ tres unidades hacia arriba.
b) Se traslada $y = 2^x$ cinco unidades hacia abajo.
c) Se traslada $y = 2^x$ una unidad a la izquierda.
d) Se traslada $y = 2^x$ dos unidades a la derecha.

Crecimiento exponencial

12.22 Representa las siguientes funciones en los mismos ejes de coordenadas y compara su crecimiento para valores suficientemente grandes de la variable x .

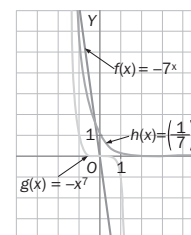
$f(x) = 4x$ $g(x) = x^4$ $h(x) = 4^x$



Crece más rápidamente la función $y = 4^x$.

12.23 Dibuja la gráfica de las siguientes funciones y compara su decrecimiento para valores suficientemente grandes de la variable x .

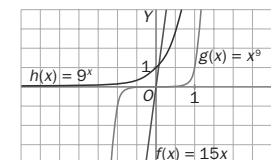
$f(x) = -7x$ $g(x) = -x^7$ $h(x) = \left(\frac{1}{7}\right)^x$



Decrece más rápidamente $h(x) = \left(\frac{1}{7}\right)^x$.

12.24 Observa la gráfica de las funciones siguientes ¿Cuál de ellas presenta un crecimiento exponencial?

La función $h(x) = 9^x$.



12.25 Teniendo en cuenta la expresión algebraica de las siguientes funciones, indica cuál o cuáles de ellas tienen un crecimiento exponencial.

$f(x) = 5.9^x$ $g(x) = x^{10}$ $h(x) = 4^{-x}$

Las funciones $f(x)$ y $g(x)$ presentan un crecimiento exponencial. La función $h(x)$ tiene un decrecimiento exponencial.

12.26 Dadas las funciones $f(x) = 3,6^x$ y $g(x) = -8,5^x$, contesta a las cuestiones siguientes.

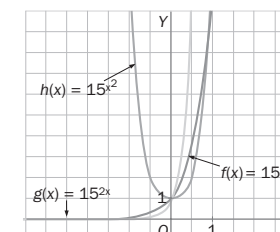
- a) ¿Son crecientes o decrecientes?
b) ¿Cuál de las dos presenta una variación más rápida en el crecimiento?

- a) $f(x)$ es creciente y $g(x)$ es decreciente.
b) La función $g(x)$ presenta una variación más rápida en el crecimiento.

12.27 Compara el crecimiento exponencial de las funciones $f(x) = 15^x$, $g(x) = 15^{2x}$ y $h(x) = 15^{x^2}$ elaborando una tabla de valores y realizando sus representaciones gráficas.

x	0	1	10	100
$f(x)$	1	15	$5,76 \cdot 10^{11}$	$7,89 \cdot 10^{69}$
$g(x)$	1	225	$3,33 \cdot 10^{23}$	$1,65 \cdot 10^{235}$
$h(x)$	1	15	$7,89 \cdot 10^{69}$	$8,18 \cdot 10^{11\,760}$

El crecimiento es menos rápido en $f(x) = 15^x$.
El crecimiento es más rápido en $h(x) = 15^{x^2}$.



El número e

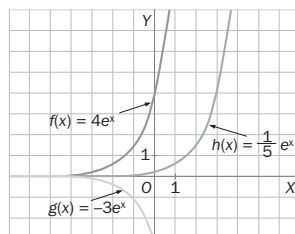
- 12.28 Construye una tabla de valores para las siguientes funciones y represéntalas gráficamente en los mismos ejes de coordenadas.

$$f(x) = 4e^x$$

$$g(x) = -3e^x$$

$$h(x) = \frac{1}{5}e^x$$

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	0,54	1,47	4	10,87	29,56
g(x)	-0,41	-1,1	-3	-8,15	-22,17
h(x)	0,027	0,073	0,2	0,54	1,48



- 12.29 Observa las gráficas de las funciones del ejercicio anterior y calcula su dominio y su recorrido. ¿Se cortan en algún punto?

$$\text{Dom } f(x) = \text{Dom } g(x) = \text{Dom } h(x) = \mathbf{R}$$

$$\text{Rec } f(x) = \text{Rec } h(x) = \mathbf{R}^+. \text{ Rec } g(x) = \mathbf{R}^-$$

Las gráficas no se cortan en ningún punto.

- 12.30 Indica cuál o cuáles de las siguientes funciones son crecientes y cuáles decrecientes.

a) $y = e^{9x}$ c) $y = \left(\frac{1}{e}\right)^x$

b) $y = -e^{\frac{x}{2}}$ d) $y = e^{-8x}$

La función del apartado a es creciente, y las funciones de los apartados b, c y d son decrecientes.

- 12.31 Indica, de entre las siguientes funciones, cuál tiene un crecimiento más rápido.

a) $f(x) = 11^x$

b) $g(x) = 2^x$

c) $h(x) = e^x$

f(x) tiene un crecimiento mayor, porque la base es mayor.

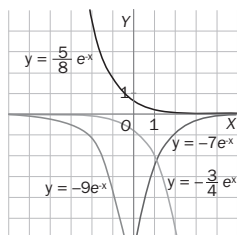
- 12.32 Dibuja la gráfica de las siguientes funciones.

a) $y = \frac{5}{8}e^{-x}$

b) $y = -7e^{-x}$

c) $y = -9e^x$

d) $y = -\frac{3}{4}e^x$



- 12.33 Calcula los puntos de corte con el eje de ordenadas de las funciones siguientes.

a) $y = e^{x+3}$

b) $y = -2e^{x-1}$

c) $y = 4e^{-x}$

d) $y = e^{\frac{2x+3}{4}}$

a) $x = 0 \Rightarrow y = e^3 \Rightarrow A(0, e^3)$

b) $x = 0 \Rightarrow y = -\frac{2}{e} \Rightarrow A\left(0, -\frac{2}{e}\right)$

c) $x = 0 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow A(0, 4)$

d) $x = 0 \Rightarrow y = e^{\frac{3}{4}} \Rightarrow A\left(0, e^{\frac{3}{4}}\right)$

- 12.34 Aplicando las traslaciones adecuadas a la función $y = e^x$, realiza la representación gráfica de las siguientes funciones.

a) $y = e^{x+5}$

b) $y = e^{x-4}$

c) $y = e^{x+6}$

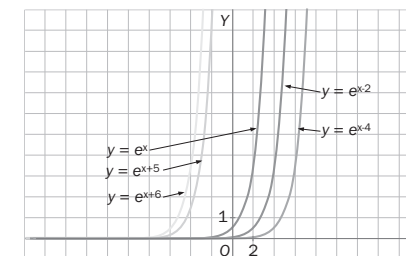
d) $y = e^{x-2}$

a) Trasladar la función $y = e^x$ cinco unidades a la izquierda.

b) Trasladar la función $y = e^x$ cuatro unidades a la derecha.

c) Trasladar la función $y = e^x$ seis unidades a la izquierda.

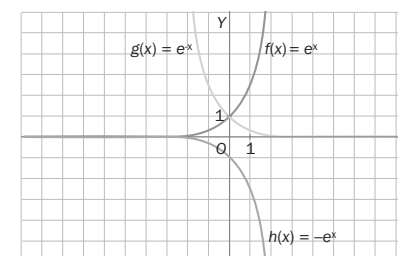
d) Trasladar la función $y = e^x$ dos unidades a la derecha.



- 12.35 Representa en los mismos ejes de coordenadas las funciones $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{-x}$ y $h(x) = -e^x$.

a) ¿Qué tipo de simetría existe entre las gráficas de f(x) y g(x)?

b) ¿Y entre las gráficas de f(x) y h(x)?



a) Son simétricas respecto al eje de ordenadas.

b) Son simétricas respecto al eje de abscisas.

- 12.36 Ordena las siguientes funciones según la rapidez con que decrecen.

$$f(x) = -6e^x$$

$$g(x) = e^{-6x}$$

$$h(x) = 6e^{-6x}$$

x	0	1	10	100
$-6e^x$	-6	-16,31	-132 158,79	$-1,61 \cdot 10^{44}$
e^{-6x}	1	0,0024	$8,76 \cdot 10^{-27}$	$2,65 \cdot 10^{-261}$
$6e^{-6x}$	6	0,015	$5,25 \cdot 10^{-26}$	$1,59 \cdot 10^{-260}$

$$h(x) > g(x) > f(x)$$

- 12.37 Aplica a la función $y = e^{-x}$ las siguientes traslaciones y escribe la expresión algebraica de la función representada.
- Cinco unidades hacia arriba.
 - Dos unidades a la izquierda.
 - Una unidad hacia abajo.
 - Seis unidades a la derecha.
- $y = e^{-x} + 5$
 - $y = e^{-x-2}$
 - $y = e^{-x} - 1$
 - $y = e^{-x+6}$

CUESTIONES PARA ACLARARSE

- 12.38 Observa la función $y = a^x$, siendo a un número positivo y distinto de 1. ¿Existe algún valor de a para el cual se obtenga un valor de y negativo?

No, porque si $a > 0$, entonces $a^x > 0$.

- 12.39 ¿En qué puntos corta la función $y = k \cdot e^x$ a los ejes de coordenadas? ¿Y la función $y = k \cdot e^{-x}$?

Las dos funciones cortan al eje OY en el mismo punto: $x = 0 \Rightarrow y = k \Rightarrow A(0, k)$.

Ninguna de las dos funciones corta al eje OX .

- 12.40 Dada la función $y = (e + 1)^x$, realiza las siguientes cuestiones.

- ¿Es exponencial? Razona tu respuesta.
- Calcula su dominio y recorrido.
- ¿Es creciente o decreciente?
- Halla los puntos de corte con los ejes.

a) Sí, porque es de la forma $y = a^x$, con a un número real.

b) $Dom f(x) = \mathbf{R}$ y $Rec f(x) = \mathbf{R}^+$

c) Es creciente en todo su dominio.

d) Corte con el eje de ordenadas: $x = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow A(0, 1)$. No corta el eje de abscisas.

- 12.41 ¿Por qué, al estudiar las funciones exponenciales, no se considera el caso en el que la base sea negativa? Explicalo, utilizando ejemplos para ello.

Teniendo en cuenta el resultado anterior, ¿sería objeto de estudio $f(x) = (1 - e)^x$?

Si la base fuese negativa, por ejemplo, $y = (-2)^x$, la función no estaría definida para valores de x racionales de denominador par. Por ejemplo, $(-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2}$ no es un número real.

Como $1 < e$, entonces $1 - e < 0$ y sería uno de los casos en los que la base es negativa y, por tanto, no es objeto de estudio.

- 12.42 Considera las funciones exponenciales $f(x) = a^x$ y $g(x) = b^x$, siendo a y b números positivos, y $a < b$. Responde a las siguientes cuestiones.

a) Cuando a y b son números mayores que 1, ¿qué función crece más rápidamente?

b) Cuando a y b son números comprendidos entre 0 y 1, ¿qué función decrece más rápidamente?

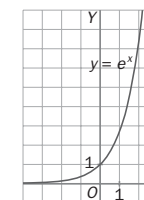
a) Si a y b son números mayores que 1, $g(x)$ crece más rápidamente.

b) Si a y b son números comprendidos entre 0 y 1, $g(x)$ decrece más rápidamente porque $a^x > b^x$.

- 12.43 A partir de la gráfica de la función $y = e^x$, representa gráficamente $y = |e^x|$. ¿Cómo son las gráficas de estas funciones? ¿Por qué se obtiene este resultado?

$$|e^x| = \begin{cases} e^x & \text{si } e^x > 0 \\ -e^x & \text{si } e^x < 0 \end{cases} \text{ . Pero } e^x > 0 \text{ para cualquier valor de } x.$$

Por lo tanto, $y = |e^x| = e^x$.



- 12.44 Considera las funciones cuya expresión gráfica es $y = k \cdot a^x$, con k un número real. Completa en tu cuaderno el cuadro siguiente, escribiendo una cruz donde corresponda.

	$k > 0$ $a > 1$	$k < 0$ $a > 1$	$k > 0$ $0 < a < 1$	$k < 0$ $0 < a < 1$
Creciente				
Decreciente				

	$k > 0$ $a > 1$	$k < 0$ $a > 1$	$k > 0$ $0 < a < 1$	$k < 0$ $0 < a < 1$
Creciente	x			x
Decreciente		x	x	

- 12.45 Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, y explica por qué.

a) El dominio de $y = 3^x$ es \mathbf{R}^+ .

b) El recorrido de la función $y = e^{-x}$ es \mathbf{R}^- .

c) Todas las funciones exponenciales pasan por el punto $(1, 0)$.

d) La función $y = 10^{-x}$ es decreciente.

a) Falso. La variable independiente puede tomar cualquier valor.

b) Falso. $e^{-x} > 0$ para cualquier valor de x . Por tanto, el recorrido de la función $y = e^{-x}$ es \mathbf{R}^+ .

c) Falso, ninguna función exponencial corta el eje de abscisas.

d) Verdadero. Si $a < b$, entonces $10^{-a} > 10^{-b}$. Por tanto, es decreciente.

- 12.46 Explica si es posible que las gráficas de las funciones $f(x) = a^x$ y $g(x) = -a^x$ se corten en algún punto.

No, porque el recorrido de $f(x)$ es \mathbf{R}^+ , y el de $g(x)$ es \mathbf{R}^- .

PROBLEMAS PARA APLICAR

- 12.47 El economista y demógrafo inglés Thomas Malthus (1766-1834) estudió la población humana y su relación con los recursos alimentarios. Concluyó que el número de individuos a lo largo del tiempo t (en años) sigue una expresión, en su forma más simple, del tipo $P(t) = P_0 \cdot 1,0281^t$, siendo P_0 la población en el instante inicial. De la misma manera, la ley que expresa la cantidad de alimentos es de la forma $A(t) = A_0 t$, donde A_0 es el total de alimentos que existen en el instante inicial.

a) ¿Qué tipo de crecimiento presenta el número de habitantes?

b) ¿Y la cantidad de alimentos?

c) ¿Cuál de las dos funciones crece más rápidamente?

d) ¿Qué cabe esperar que ocurra con el paso del tiempo?

a) El número de habitantes presenta un crecimiento exponencial.

b) La cantidad de alimentos presenta un crecimiento lineal.

c) Crece más rápidamente el número de habitantes.

d) Cabe esperar que, con el paso del tiempo, haya más habitantes que alimentos, y, por tanto, estos no sean suficientes para alimentar a toda la población.

12.48 Con el fin de ahorrar, Julia ha abierto una cuenta en un banco que le ofrece un interés del 2,5% anual. Si inicialmente ingresa 500 euros, calcula:

- Cuánto dinero tendrá en la cuenta al finalizar el primer año, el segundo, el tercero, el cuarto y el quinto, si no ingresa ni retira dinero en ese tiempo.
- La fórmula que permite obtener el dinero que tendrá en la cuenta con el paso de los años, si se mantiene el interés.
- ¿Cuántos años tendrían que pasar para que se duplicara el ingreso inicial?
- Si en lugar de abrir la cuenta con 500 euros, lo hubiera hecho con 1000, ¿se habría reducido a la mitad el tiempo que tardara en duplicar el importe inicial?

a)

Años	1	2	3	4	5
Dinero	512,50	525,31	538,45	551,91	565,70

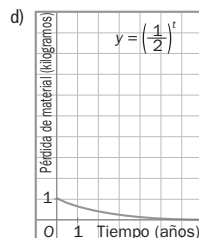
- Si llamamos t al tiempo (en años) e y al capital final, tenemos: $y = 500 \cdot 1,025^t$.
- $1000 = 500 \cdot 1,025^t \Rightarrow 2 = 1,025^t \Rightarrow t = 28,07$
Por tanto, han de pasar 29 años.
- $2000 = 1000 \cdot 1,025^t \Rightarrow 2 = 1,025^t \Rightarrow t = 28,07$
Se tarda el mismo tiempo.

12.49 De un material radiactivo se sabe que un kilogramo se reduce a la mitad cada año.

- Escribe la expresión algebraica de la función que indica la pérdida de material a lo largo de los años.
- Calcula el dominio y el recorrido de dicha función.
- ¿Es creciente o decreciente?
- Haz la representación gráfica de la función.
- ¿Cuántos años han de pasar para que no quede material radiactivo?

- Si llamamos t al tiempo transcurrido en años, e y a la cantidad de material perdido, tenemos: $y = \left(\frac{1}{2}\right)^t$.

- $\text{Dom } f(x) = \mathbf{R}^+$ y $\text{Rec } f(x) = (0, 1]$
- Es una función decreciente.

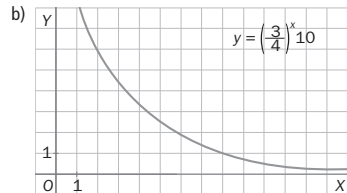


- La función nunca se anula, pues $\left(\frac{1}{2}\right)^t > 0$.
Por tanto, siempre quedará algo de material radiactivo.

12.50 Juan y Ana se encuentran a una distancia de 10 metros. Juan avanza la mitad de esa distancia y Ana retrocede la cuarta parte. Después, Juan avanza de nuevo la mitad de la distancia que lo separa de Ana y esta vuelve a retroceder la cuarta parte.

- Calcula la expresión algebraica que indica la distancia que los separa en función del número de movimientos realizados.
- Dibuja la gráfica aproximada de la función.
- ¿Cuántos movimientos han de realizar ambos amigos para juntarse?

- Si llamamos x al número de movimientos realizados e y a la distancia que los separa, tenemos: $y = \left(\frac{3}{4}\right)^x \cdot 10$.



- La distancia nunca se hace cero.

12.51 Cada persona produce al año unos 300 kilogramos de basura, de los que un 90% pueden reciclarse.

- Halla la función que exprese la cantidad de basura que se puede reciclar en función de los años transcurridos.

- Construye una tabla de valores que indique los kilogramos de basura que se pueden reciclar durante los 5 primeros años.

- ¿Es una función creciente o decreciente?

- Llamamos t a los años transcurridos, e y a la cantidad de basura reciclada: $y = 300 \cdot 0,9 \cdot 0,1^{t-1} = 270 \cdot 0,1^{t-1}$.

b)

x	1	2	3	4	5
y	270	27	2,7	0,27	0,027

- Es una función decreciente.

12.52 La cantidad de unidades vendidas de un producto de limpieza viene dada, en función del número de veces que ha aparecido su publicidad en televisión, t , según la expresión:

$$E(t) = 3000 - 500 \cdot 2^{1-t}$$

- ¿Cuántas unidades se habrían vendido si el producto no hubiera aparecido ninguna vez en televisión?
- ¿Existe algún valor de t para el cual el número de unidades vendidas sea nulo?

- $E(0) = 3000 - 1000 = 2000$ unidades

- $3000 = 500 \cdot 2^{1-t} \Rightarrow 6 = 2^{1-t}$. Como $1 - t \leq 1$, pues $t \geq 0$, entonces $2^{1-t} \leq 2 \leq 6$. Luego $2^{1-t} \leq 6$. Por tanto, no existe ningún valor de t para el cual el número de unidades vendidas sea nulo.

REFUERZO

Funciones exponenciales

12.53 Identifica cuál o cuáles de las siguientes funciones son exponenciales.

a) $y = 16^x$

c) $y = (-8)^x$

e) $y = \left(\frac{1}{9}\right)^x$

b) $y = -x^3$

d) $y = \frac{2}{5}x$

f) $y = -15^{2x}$

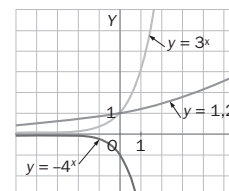
Son funciones exponenciales las de los apartados a, c, e y f.

12.54 Representa gráficamente las siguientes funciones en los mismos ejes de coordenadas.

a) $f(x) = -4^x$

b) $g(x) = 3^x$

c) $h(x) = 1,2^x$



12.55 Sin representarlas gráficamente, indica cuáles de las siguientes funciones son crecientes y cuáles decrecientes.

a) $y = \left(\frac{2}{9}\right)^x$

b) $y = 24^{-x}$

c) $y = 6,8^x$

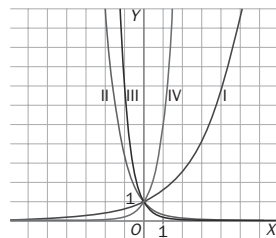
d) $y = \left(\frac{4}{3}\right)^x$

Son crecientes las funciones de los apartados c y d, y decrecientes las de los apartados a y b.

12.56 Asocia a cada gráfica la expresión algebraica que le corresponde.

- a) $y = 1,6^x$
b) $y = 0,3^x$
c) $y = 7^{-x}$
d) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{-x}$

I con a; II con b; III con c; IV con d



Crecimiento exponencial

12.57 Estudia el tipo de crecimiento de las siguientes funciones.

$$f(x) = 7x \quad g(x) = x^7 \quad h(x) = 7^x$$

$f(x)$ tiene un crecimiento lineal, $g(x)$ potencial y $h(x)$ exponencial.

12.58 Sin hacer una tabla de valores ni su gráfica, indica cuáles de las siguientes funciones presentan un crecimiento exponencial.

- a) $y = 5^{-x}$ c) $y = \frac{10}{3}x$ e) $y = 1,3^x$
b) $y = \left(\frac{2}{9}\right)^x$ d) $y = x^{15}$ f) $y = -x^{28}$

Las funciones de los apartados a, b y e son exponenciales.

De ellas, solamente la función del apartado e presenta un crecimiento exponencial. Las otras dos funciones presentan un decrecimiento exponencial.

12.59 Compara el decrecimiento exponencial de las funciones $f(x) = \left(\frac{1}{8}\right)^x$ y $g(x) = 14^{-x}$.

Construimos una tabla de valores para las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

x	0	1	10	100	1000
f(x)	1	0,125	$9,31 \cdot 10^{-10}$	$4,91 \cdot 10^{-91}$	$8,13 \cdot 10^{-904}$
g(x)	1	0,0714	$3,46 \cdot 10^{-12}$	$2,44 \cdot 10^{-115}$	$7,45 \cdot 10^{-1147}$

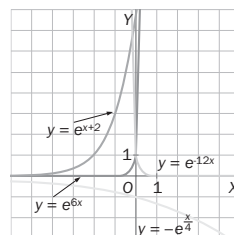
A la vista de la tabla, decrece más rápidamente la función $g(x)$.

El número e

12.60 Construye una tabla de valores para cada una de estas funciones y represéntalas gráficamente.

- a) $y = e^{6x}$ b) $y = e^{-12x}$ c) $y = e^{x+2}$ d) $y = -e^{\frac{x}{4}}$

x	-2	-1	0	1	2
$y = e^{6x}$	$6,14 \cdot 10^{-6}$	$2,48 \cdot 10^{-3}$	1	403,43	162 754,79
$y = e^{-12x}$	$2,65 \cdot 10^{10}$	$6,14 \cdot 10^{-6}$	1	$6,14 \cdot 10^{-6}$	$3,78 \cdot 10^{-11}$
$y = e^{x+2}$	1	2,72	7,39	20,09	54,60
$y = -e^{\frac{x}{4}}$	-0,61	-0,78	-1	-1,28	-7,39



12.61 De entre las siguientes funciones, ¿cuáles son crecientes y cuáles decrecientes?

- a) $y = e^{9x}$ b) $y = e^{-5x}$ c) $y = \left(\frac{1}{e}\right)^{x^2}$ d) $y = e^{\frac{7}{3}x}$

Son crecientes las funciones de los apartados a y d, y decrecientes la del apartado b.

La c crece en $(-\infty, 0)$ y decrece en $(0, +\infty)$

12.62 Compara el crecimiento exponencial de las funciones $f(x) = e^{8x}$ y $g(x) = e^{\frac{4}{3}x}$.

x	0	1	10	20
f(x)	1	2980,96	$5,54 \cdot 10^{34}$	$3,07 \cdot 10^{69}$
g(x)	1	2,23	2890,96	$8,88 \cdot 10^6$

Crece más rápidamente la función $f(x)$.

AMPLIACIÓN

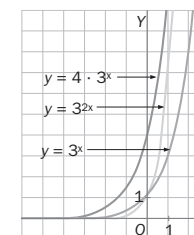
12.63 Dadas las funciones $f(x) = e^{10x}$ y $g(x) = 7^{4x}$, ¿cuál de ellas crece más rápidamente?

x	0	1	10
f(x)	1	22 026,47	$2,69 \cdot 10^{43}$
g(x)	1	2401	$6,37 \cdot 10^{33}$

Crece más rápidamente la función $f(x) = e^{10x}$.

12.64 Realiza la representación gráfica de las funciones $f(x) = 4 \cdot 3^x$ y $g(x) = 3^{2x}$ y compáralas con $h(x) = 3^x$, estudiando su dominio, su recorrido, los puntos de corte con los ejes, su crecimiento y su decrecimiento.

¿En cuál de ellas es más rápido el crecimiento?



- $Dom f(x) = Dom g(x) = Dom h(x) = \mathbf{R}$
- $Rec f(x) = Rec g(x) = Rec h(x) = \mathbf{R}^+$
- Corte de $f(x)$ con el eje OY: (0, 4). No corta el eje OX.
- Corte de $g(x)$ con el eje OY: (0, 1). No corta el eje OX.
- Corte de $h(x)$ con el eje OY: (0, 1). No corta el eje OX.
- Las tres funciones son crecientes.
- El crecimiento es más rápido en la función $g(x)$.

12.65 Halla el dominio de las siguientes funciones exponenciales.

- a) $y = 2^{\frac{1}{x}}$ b) $y = e^{\sqrt{2x+6}}$ c) $y = \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{x+1}{x-3}}$ d) $y = 5^{\frac{4}{\sqrt{x-1}}}$

- a) $Dom y = \mathbf{R} - \{0\}$ b) $Dom y = [-3, +\infty)$ c) $Dom y = \mathbf{R} - \{3\}$ d) $Dom y = (1, +\infty)$

12.66 Para cada uno de los casos siguientes, escribe la expresión algebraica de una función exponencial.

- a) No corta al eje de ordenadas en (0, 1).
b) Es decreciente, siendo la base y el exponente positivos.

- a) $y = 3 \cdot 2^x$ b) $y = -6^x$

12.67 Dadas las sucesiones que tienen por término general $a_n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ y $b_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}$.

- a) Calcula, para cada una de ellas, los términos que se encuentran en las posiciones 1, 2, 3, 4, 10, 100, 1000 y 10 000.
 b) ¿A qué número se aproximan cada una de ellas cuando n tiende a $+\infty$?
 c) Teniendo en cuenta el resultado anterior, ¿qué forma debe tener una sucesión que tiene por límite el número e ?

a)

n	1	2	3	4	10	100	1000	10000
a_n	2,25	2,37	2,44	2,49	2,60	2,70	2,717	2,718
b_n	2,25	2,44	2,52	2,57	2,65	2,71	2,718	2,7182

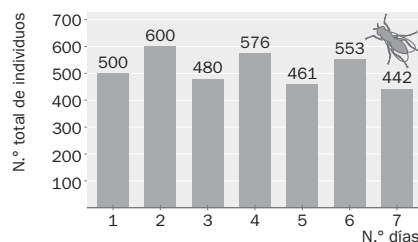
b) Tienden al número e .

c) $\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$

PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

12.68 Crecimiento de la población

La población de ciertos insectos de una zona de aguas estancadas presenta un crecimiento muy curioso. Fíjate en el siguiente gráfico:



Como ves, si un día aumenta, al día siguiente disminuye. Lo más curioso es que siempre lo hace en el mismo porcentaje, tanto el día que aumenta como el que disminuye.

- a) A la vista de los datos, calcula el mencionado porcentaje de aumento y disminución.
 b) Calcula la población en el undécimo día.
 c) ¿Podrías dar una expresión exponencial que permitiera calcular la población en los días impares?
 d) Calcula la población cuando han pasado 30 días.

a) Fijándonos en el primer aumento: $\frac{500}{100} = \frac{100}{x}$. Luego $x = 20$. El porcentaje de aumento y disminución es del 20%.

b) En el tercer día: $500 \cdot 1,2 \cdot 0,8 = 500 \cdot 0,96 = 480$ insectos
 En el quinto día: $500 \cdot 1,2 \cdot 0,8 \cdot 1,2 \cdot 0,8 = 500 \cdot 0,96^2 = 461$ insectos
 En el séptimo día: $500 \cdot 1,2 \cdot 0,8 \cdot 1,2 \cdot 0,8 \cdot 1,2 \cdot 0,8 = 442$ insectos
 En el undécimo día: $500 \cdot 0,96^{\frac{11-1}{2}} = 408$ insectos

c) Si llamamos y al número de insectos, tenemos: $y(n) = 500 \cdot 0,96^{\frac{n-1}{2}}$.

d) $y(29) = 500 \cdot 0,96^{\frac{29-1}{2}} = 282$ insectos

12.69 Convergencia económica

A continuación, se ofrecen los datos sobre la renta per cápita de dos países A y B en los años 1990 y 2005.

	1990	2005
País A	10 200	18 100
País B	14 200	19 110

Se supone que el porcentaje de crecimiento en un año (tasa de crecimiento anual) de la renta en cada país es siempre constante (igual para todos los años) y que así permanecerá en el futuro próximo.

- a) Comprueba cuál de las dos tasas de crecimiento anual corresponde al país A :
 i) 3,9% ii) 11,83%

b) Calcula la tasa de crecimiento anual del país B .

c) Completa la siguiente tabla e indica en qué momento la renta de A superará a la de B :

	2006	2008	2010
A			
B			

Ten en cuenta que se supone que la tasa de crecimiento es siempre la misma para cada país.

a) La tasa de crecimiento anual de la renta de A es del 3,9%, ya que $10\,200 \cdot 1,039^{15} \approx 18\,100$.

b) $19\,110 = 14\,200 \cdot r^{15} \Rightarrow r^{15} = \frac{19\,110}{14\,200} = 1,346 \Rightarrow r \approx 1,02$

Por tanto, la tasa de crecimiento anual de la renta de B es del 2%.

c)

	2006	2008	2010
A	18 806	20 301	21 916
B	19 492	20 280	21 099

En el año 2008, la renta de A será superior a la de B .

AUTOEVALUACIÓN

12.A1 Identifica, de entre las siguientes funciones, las que son exponenciales.

- a) $y = 5 + x + 2x^2$
 b) $y = -\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x}{5}}$
 c) $y = e^{-10x}$
 d) $y = \left(\frac{2}{7}\right)^3 x$

Son exponenciales las funciones de los apartados b y c.

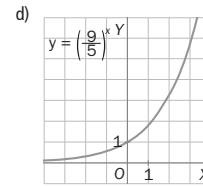
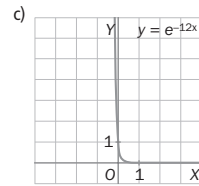
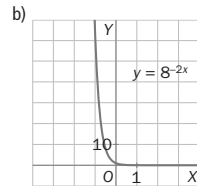
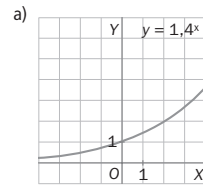
12.A2 Representa gráficamente las siguientes funciones.

a) $y = 1,4^x$

b) $y = 8^{-2x}$

c) $y = e^{-12x}$

d) $y = \left(\frac{9}{5}\right)^x$



12.A3 Halla el punto de corte con el eje de ordenadas de las funciones siguientes.

a) $y = -4^{7x}$

b) $y = 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$

c) $y = -e^{x-1}$

d) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{2-x}$

a) $x = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow A(0, -1)$

b) $x = 0 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow A(0, 6)$

c) $x = 0 \Rightarrow y = -e^{-1} \Rightarrow A\left(0, \frac{-1}{e}\right)$

d) $x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{9} \Rightarrow A\left(0, \frac{1}{9}\right)$

12.A4 Sin hacer la gráfica, indica si son crecientes o decrecientes cada una de las siguientes funciones.

a) $f(x) = e^{-12x}$

b) $g(x) = 0,6^x$

c) $h(x) = \left(\frac{8}{7}\right)^x$

La función $h(x)$ es creciente, y las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son decrecientes.

12.A5 Calcula el dominio y el recorrido de las funciones siguientes.

a) $y = 5^{4x}$

b) $y = 2,6^x$

c) $y = -16^x$

d) $y = 3^{-x}$

a) Dom $y = \mathbb{R}$; Rec $y = \mathbb{R}^+$

b) Dom $y = \mathbb{R}$; Rec $y = \mathbb{R}^+$

c) Dom $y = \mathbb{R}$; Rec $y = \mathbb{R}^-$

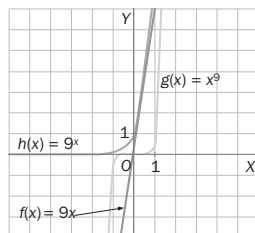
d) Dom $y = \mathbb{R}$; Rec $y = \mathbb{R}^+$

12.A6 Representa gráficamente las siguientes funciones y compara su crecimiento para valores suficientemente grandes de la variable x .

$f(x) = 9x$

$g(x) = x^9$

$h(x) = 9^x$



$f(x)$ tiene un crecimiento lineal, $g(x)$ potencial y $h(x)$ exponencial. La que crece más rápidamente es $h(x)$, y luego, $g(x)$.

12.A7 Identifica cada gráfica con la expresión algebraica que le corresponde.

$f(x) = 7^x$

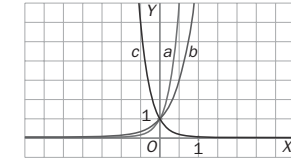
$g(x) = \left(\frac{1}{6}\right)^x$

$h(x) = 3^x$

a es la gráfica de $y = 7^x$.

b es la gráfica de $y = 3^x$.

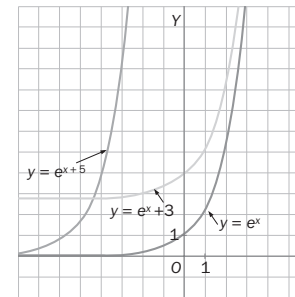
c es la gráfica de $y = \left(\frac{1}{6}\right)^x$.



12.A8 A partir de la gráfica de $y = e^x$, representa las siguientes funciones.

a) $y = e^x + 3$

b) $y = e^{x+5}$



a) Se traslada 3 unidades hacia arriba.

b) Se traslada 5 unidades a la izquierda.

12.A9 Un banco ofrece elegir entre un 6% de interés compuesto, con período de capitalización anual, trimestral o mensual. Si Marcos decide hacer un ingreso de 10 000 euros a 20 años, ¿cuánto recibiría en cada caso?

Anual: $C = 10\,000 \cdot (1 + 0,06)^{20} = 32\,071,35 \text{ €}$

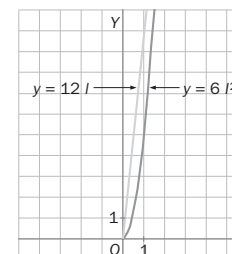
Trimestral: $C = 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{6}{400}\right)^{4 \cdot 20} = 32\,906,63 \text{ €}$

Mensual: $C = 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{6}{1200}\right)^{12 \cdot 20} = 33\,102,04 \text{ €}$

MATETIEMPOS

Cubo

Si el lado de un cubo mide " l " unidades, construye un gráfico en el que se representen la longitud total de sus aristas y el área total del cubo en función de " l ". ¿Existe algún punto en el que ambos valores coincidan?



Las funciones son $y = 12l$ e $y = 6l^2$. Ambas coinciden si $6l^2 = 12l$.

Resolviendo la ecuación, se obtiene $l = 0$ o $l = 2$. Por tanto, coinciden cuando el lado mide 2 unidades.