

# **Problemas resueltos del libro de texto.**

## **Tema 8. Geometría Analítica.**

### **Combinación lineal de vectores.**

**39.-** Es evidente que sí es combinación lineal de estos dos vectores, ya que -4 y 3 permiten escribir  $\vec{z}$  como combinación lineal de  $\vec{i}, \vec{j}$  en la forma  $\vec{z} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$ . Las coordenadas cartesianas de  $\vec{z}$  son:  $\vec{z} = -4\vec{i} + 3\vec{j} = -4(1,0) + 3(0,1) = (-4,3)$ .

**40.-** a) Tenemos que:  $\vec{u} = 2\vec{v} - 3\vec{w} \rightarrow 2\vec{v} = \vec{u} + 3\vec{w} \rightarrow \vec{v} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{3}{2}\vec{w}$

b) En este caso:  $\vec{u} = 2\vec{v} - 3\vec{w} \rightarrow 3\vec{w} = 2\vec{v} - \vec{u} \rightarrow \vec{w} = \frac{2}{3}\vec{v} - \frac{1}{3}\vec{u}$

**41.-** Para que sean linealmente dependientes han de existir  $\alpha, \beta \in \mathbb{R} / \vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$ . Lo comprobamos:

$$\vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w} \rightarrow (2, -4) = \alpha(3, 1) + \beta(11, -15), \text{ es decir,}$$

$$\begin{cases} 2 = 3\alpha + 11\beta \\ -4 = \alpha - 15\beta \end{cases}, \text{ sistema que da como solución } \alpha = \frac{1}{4}, \beta = -\frac{1}{4}, \text{ por lo tanto los tres}$$

vectores son linealmente dependientes.

**42.-** En primer lugar tenemos que las coordenadas cartesianas de  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  son  $\vec{a} = (-3, 6)$  y  $\vec{b} = (5, 2)$ . Así:

$$\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b} = (-6, 12) - (5, 2) = (-11, 10) \text{ y}$$

$$\vec{v} = 6\vec{a} - 4\vec{b} = (-18, 35) - (20, 8) = (-38, 27)$$

### **Producto escalar.**

**43.-** a)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-6, 56)$

b)  $-2\vec{u} \cdot \vec{v} = (-12, 112) \cdot (1, 7) = (-12, 112)$

c)  $|\vec{u}| = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = 10$

**44.-** El producto escalar de dos vectores perpendiculares es 0, luego bastará comprobarlo en cada caso.

a)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ , sí.

b)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -32 \neq 0$ , no.

c)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ , sí.

d)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -8 \neq 0$ , no.

**45.-** El ángulo formado por dos vectores viene dado por  $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$ . De esta

forma:

$$\text{a) } \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}\sqrt{4}} = \sqrt{\frac{27}{28}} \rightarrow \alpha \approx 10'9^\circ.$$

$$\text{b) } \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{-68}{\sqrt{136}\sqrt{34}} = -1 \rightarrow \alpha = 180^\circ$$

$$\text{c) } \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{-2}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = -\frac{1}{3} \rightarrow \alpha \approx 109,5^\circ$$

**46.-** Las coordenadas del vector verde son  $\vec{v} = (3, 3)$  y las del rojo  $\vec{r} = (12, 0)$ . Su producto escalar es:  $\vec{r} \cdot \vec{v} = 36$

**47.-** Con la misma expresión del ejercicio 45 tenemos que:

$$\text{a) } \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \alpha = 30^\circ$$

$$\text{b) } \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{16\sqrt{2}}{32} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \alpha = 45^\circ$$

$$\text{48.- a) } |\vec{u}| = 20 = \sqrt{4^2 + x^2} \rightarrow 400 = 16 + x^2 \rightarrow x^2 = 384 \rightarrow x = \pm 8\sqrt{6}$$

Con lo cual habría dos vectores que cumplirían lo requerido:  $\vec{u} = (4, 8\sqrt{6})$  y  $\vec{u} = (4, -8\sqrt{6})$

$$\text{b) } \vec{u} \cdot \vec{v} = 12 - 5x = 2 \rightarrow x = 2$$

**49.-** Para que sean perpendiculares, su producto escalar ha de ser nulo, luego:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -a + 15 = 0 \rightarrow a = 15$$

**50.-** Hemos de hallar un vector  $\vec{u} = (x, y)$  que cumpla las dos condiciones exigidas, con lo cual obtenemos el sistema no lineal:

$$|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{10}, \text{ resolviendo tenemos dos pares de soluciones, con lo que habrán } \vec{u} \cdot \vec{v} = 6x - 2y = 0$$

dos vectores que satisfagan lo pedido:  $\vec{u}_1 = (1, 3)$  y  $\vec{u}_2 = (-1, -3)$ .

**51.-** Aplicando la definición:

$$\text{a) } d(A, B) = \sqrt{4^2 + (-11)^2} = \sqrt{137}$$

$$\text{b) } d(C, D) = \sqrt{(-9)^2 + 15^2} = \sqrt{137} = 3\sqrt{34}$$

**52.-** Para el segmento  $\overline{AB}$  tenemos  $M = \left( \frac{2+2}{2}, \frac{1+5}{2} \right) = (2, 3)$ .

Para  $\overline{AC}$ ,  $N = \left( \frac{2-2}{2}, \frac{1+3}{2} \right) = (0, 2)$ .

Finalmente, para  $\overline{BC}$ ,  $S = \left( \frac{2-2}{2}, \frac{5+3}{2} \right) = (0, 4)$ .

### Ecuaciones de la recta.

**53.-** a) Para determinar un punto basta dar un valor a  $x$  y obtener  $y$ . Para obtener el vector director tendremos que calcular dos puntos de la recta y con estos dos puntos obtenerlo. Veamos:

Si  $x = 3 \rightarrow y = -4$ , luego un punto de la recta es  $P(3, -4)$ .

Si  $x = 1 \rightarrow y = 1$ , con lo que otro punto es  $Q(1, 1)$ .

Un vector director de la recta será:  $\overrightarrow{PQ} = (-2, 5)$ .

b) Análogamente:

Si  $x = 0 \rightarrow y = 0$ , por tanto  $P(0, 0)$ .

$x = 1 \rightarrow y = 4$ , luego  $Q(1, 4)$ .

Un vector director es  $\overrightarrow{PQ} = (1, 4)$ .

c) Para hallar los puntos de la recta en paramétricas daremos valores al parámetro  $t$ . De esta forma:

Si  $t = 0 \rightarrow x = 2; y = 5$ , siendo  $P(2, 5)$ .

Si  $t = 1 \rightarrow x = 1; y = 8$ , siendo  $Q(1, 8)$ .

Así, un vector director es  $\overrightarrow{PQ} = (-1, 3)$ .

d) De la misma forma:

Si  $t = 0 \rightarrow x = 4; y = 0$ , siendo  $P(4, 0)$ .

Si  $t = 1 \rightarrow x = 6; y = -6$ , siendo  $Q(6, -6)$ .

Un vector director es  $\overrightarrow{PQ} = (2, -6)$ .

**54.-** Consideramos dos puntos de la recta, como por ejemplo  $P(-3, 0)$  y  $Q(0, 4)$ . Un vector director de la misma es  $\overrightarrow{PQ} = (3, 4)$ . Así,

$(x, y) = (-3, 0) + t(3, 4)$ , que es la ecuación vectorial.

$\begin{cases} x = -3 + 3t \\ y = 4t \end{cases}$ , es la ecuación paramétrica.

$\frac{x+3}{3} = \frac{y}{4}$ , es la ecuación continua.

$y = \frac{4}{3}x + 4$ , que es la ecuación punto – pendiente y coincide con la ecuación explícita.

En ella podemos observar la pendiente  $m = \frac{4}{3}$  y la ordenada en el origen  $n = 4$ .

Y finalmente  $4x - 3y + 12 = 0$  es la ecuación general o implícita.

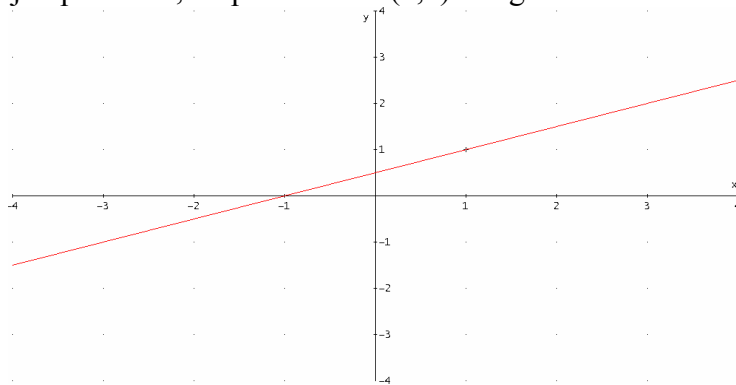
**55.-** Para hallar la pendiente escribimos la ecuación en forma explícita,

$3x + 2y - 6 = 0 \rightarrow y = -\frac{3}{2}x + 3$ , luego la pendiente de la recta es  $m = -\frac{3}{2}$ .

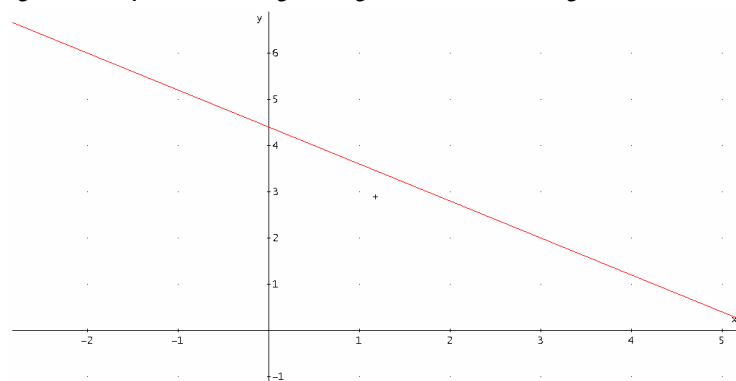
56.- Viene dada por:  $\frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 1$  (Mirar el libro).

57.- Tenemos que:  $y = 2x + 1 \rightarrow y - 1 = 2x \rightarrow \frac{y-1}{2} = x$ , que es la forma continua.

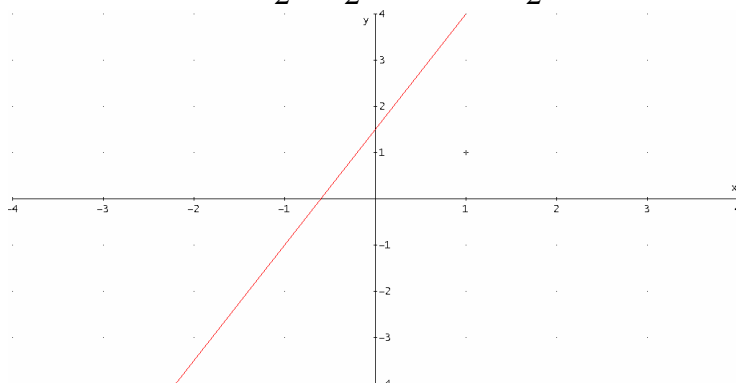
58.- a) Tenemos:  $\frac{x+1}{2} = y \rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ , luego la pendiente es  $m = \frac{1}{2}$  y dándole un valor a x, por ejemplo  $x = 1$ , un punto será  $P(1,1)$ . Su gráfica es:



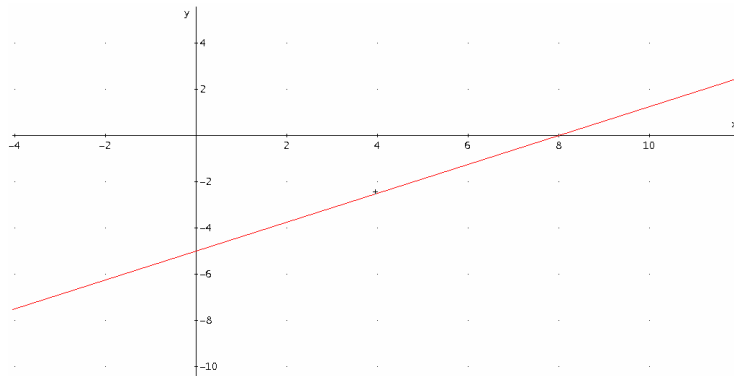
b) Tenemos:  $\frac{x-3}{5} = \frac{y-2}{-4} \rightarrow y = -\frac{4}{5}x + \frac{22}{5}$ , luego  $m = -\frac{4}{5}$  y un punto es  $P(0, \frac{22}{5})$ .



c) Tenemos:  $5x - 2y + 3 = 0 \rightarrow y = \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}$ , luego  $m = \frac{5}{2}$  y un punto es  $P(0, \frac{3}{2})$ .



d) Tenemos:  $\frac{x}{8} - \frac{y}{5} = 1 \rightarrow y = \frac{5}{8}x - 5$ , con lo que  $m = \frac{5}{8}$  y  $P(0, -5)$



### Posiciones relativas.

59.- a) Tenemos que  $\frac{2}{1} \neq \frac{5}{2} \neq -\frac{7}{2}$ , luego son rectas secantes. El punto de corte se obtiene resolviendo el sistema que determinan las dos ecuaciones, cuya solución es:  $P(24, 11)$ .

b) En este caso:  $\frac{6}{3} = \frac{4}{2} = \frac{12}{6}$ , con lo cual son rectas coincidentes (tienen infinitos puntos de contacto).

c) Y, por último:  $\frac{1}{3} = \frac{-5}{-15} \neq \frac{3}{8}$ , con lo que son rectas paralelas (no tienen ningún punto común).

60.- Escribimos  $r$  y  $s$  en su forma general:

$$r \equiv x - y - 3 = 0$$

Para hallar la ecuación de  $s$  calculamos un vector director de la misma:  $\overrightarrow{AB} = (-11, -4)$ , así:

$$r \equiv (x, y) = (7, 5) + t(-11, -4) \rightarrow \begin{cases} x = 7 - 11t \\ y = 5 - 4t \end{cases} \rightarrow \frac{x-7}{-11} = \frac{y-5}{-4} \rightarrow -4x + 28 = -11y + 55 \rightarrow 4x - 11y + 27 = 0$$

luego:  $\frac{1}{4} \neq \frac{-1}{-11} \neq \frac{-3}{27}$ , por lo tanto son rectas secantes.

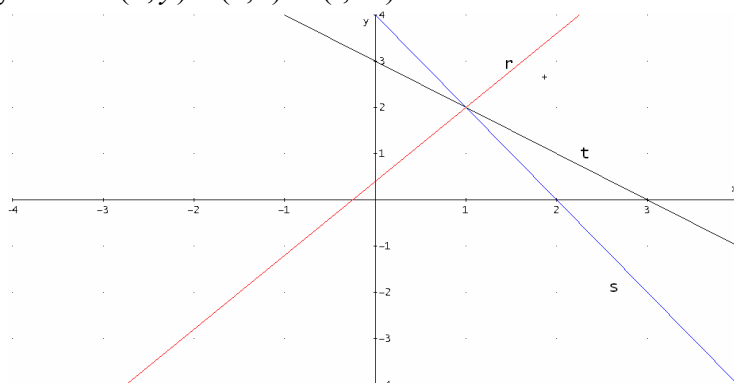
61.- Como tiene la misma pendiente que la recta  $y = 4x + 9$ , cuya pendiente es  $m = 4$ , la ecuación de la recta pedida tiene pendiente 4 y pasa por  $A(1, 3)$ . La ecuación punto-pendiente viene dada por:  $y - 3 = 4(x - 1)$ .

62.- La ecuación  $7x - 14y + 3 = 0$  tiene pendiente  $m = \frac{1}{2}$ , lo que se observa fácilmente escribiendo dicha ecuación en forma explícita. Así, hemos de construir la ecuación general de la recta de pendiente  $m = \frac{1}{2}$  y que pasa por  $A(-2, 4)$ . La ecuación punto-pendiente es  $y - 4 = \frac{1}{2}(x + 2)$ , luego:

$$y - 4 = \frac{1}{2}(x + 2)$$

$y - 4 = \frac{1}{2}(x + 2) \rightarrow 2y - 8 = x + 2 \rightarrow x - 2y + 10 = 0$ , que es la ecuación solicitada.

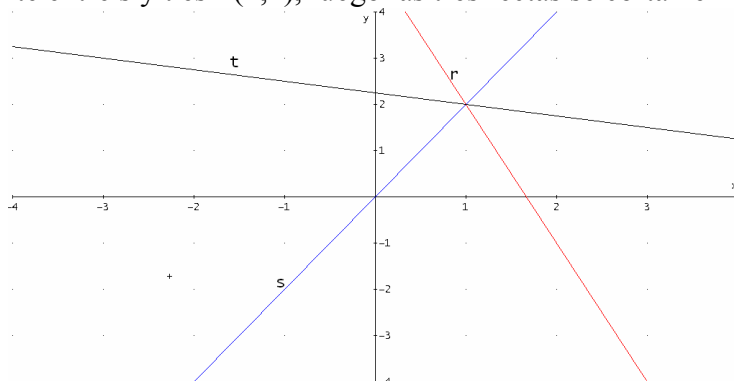
**63.-** Calculamos el punto de corte de  $r$  y  $s$  resolviendo el sistema determinado por ambas ecuaciones y obtenemos el punto  $P(1,2)$ . Así, hemos de determinar la ecuación de la recta que pasa por  $A(0,3)$  y  $P(1,2)$ . Calculamos un vector director de la misma:  $\overrightarrow{AP} = (1, -1)$ , y así:  $t \equiv (x, y) = (0, 3) + t(1, -1)$  es la ecuación de la recta pedida.



**64.-** Calcularemos el punto de corte entre  $r$  y  $s$  y el punto de corte entre  $s$  y  $t$ ; si es el mismo, las tres rectas serán coincidentes. Así:

El punto de corte entre  $r$  y  $s$  es  $P(1,2)$ .

El punto de corte entre  $s$  y  $t$  es  $P(1,2)$ , luego las tres rectas se cortan en el punto  $P(1,2)$ .



### Cuestiones para aclararse.

**65.-** Calculamos  $\overrightarrow{AB} = (-1, 2)$  y efectivamente vemos que sí lo es.

**66.-** No, ya que han de tener mismo módulo (puede ocurrir), misma dirección (la tienen) e igual sentido, cosa que no ocurre, ya que tienen sentido opuesto.

**67.-** a) Es producto de un número por un vector, que da como resultado otro vector.

b) La suma de dos vectores da como resultado otro vector, y al multiplicar éste por un número, el resultado es otro vector.

c) Ahora se multiplica la suma de dos vectores por otro vector, con lo que a fin de cuentas tenemos un vector multiplicado por otro, que da como resultado un número.

d) El producto de dos vectores da como resultado un número que, sumado a otro número da como resultado un número.

**68.-** Sean dos vectores tales que  $|\vec{u}| = |\vec{v}|$  y tales que el ángulo formado entre ellos es de

$180^\circ$ . Su producto escalar es:  $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos 180^\circ = -|\vec{u}|^2$ .

**69.-** En este caso su dirección y su sentido son iguales, ya que:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 = 1 \cdot 1 \cos(\vec{u}, \vec{v}) \rightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 1 \rightarrow \alpha = 0^\circ.$$

**70.-** Veámoslo:  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 12 = 4 \cdot 3 \cos(\vec{u}, \vec{v}) \rightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 1 \rightarrow \alpha = 0^\circ$ , luego, en efecto es posible, siempre y cuando ambos vectores tengan misma dirección y sentido.

**71.-** a) No es posible. En este caso, la información no es suficiente, ya que el punto A(0,6) coincide con el valor de la ordenada en el origen, puesto que ésta es el punto donde la recta corta al eje OY; de hecho, existen infinitas rectas que cumplen lo requerido.

b) En este caso sí es posible ya que se conocen dos puntos de la misma, el punto A(0,6) y el punto O(0,0); por lo tanto, la recta queda perfectamente determinada.

**72.-** Tenemos:

La recta  $y + 1 = 3x$  está relacionada con  $m = 3$ , que es su pendiente.

La recta  $3x + 8y - 5 = 0$  está relacionada con  $n = \frac{5}{8}$ , que es su ordenada en el origen.

La recta  $\frac{x-5}{2} = \frac{y-2}{-4}$  está relacionada con A(7,-2), que es un punto de la misma.

La recta  $y = 5x + 4$  está relacionada con  $\vec{u} = (1, 5)$ , que es un vector director de la misma.

**73.-** a) Son dos rectas coincidentes.

b) Dos rectas secantes.

c) Dos rectas, o bien paralelas, o bien coincidentes.

### Refuerzo.

**82.-** Teniendo en cuenta que A(4,5), B(-1,-1), C(1,-3), D(6,3), se tiene que:

$\overrightarrow{BA} = (5, 6)$ ,  $\overrightarrow{CD} = (5, 6)$ ,  $\overrightarrow{BC} = (2, -2)$ ,  $\overrightarrow{AD} = (2, -2)$ , luego equipolentes son  $\overrightarrow{BA}$  y  $\overrightarrow{CD}$  por un lado y  $\overrightarrow{BC}$  y  $\overrightarrow{AD}$  por otro.

**83.-** a) (-9,25).

b) (-9,0).

c) (6,1).

d) (21,23).

**84.-**  $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-10, 48)$ ;  $\vec{v} \cdot \vec{v} = (4, 36)$ ,  $|\vec{u}| = \sqrt{89}$ ,  $|\vec{v}| = \sqrt{40}$

**85.-** a)  $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \rightarrow \alpha = 90^\circ$

b)  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{-30}{\sqrt{90}\sqrt{10}} = -1 \rightarrow \alpha = 180^\circ$

**86.-** Para verlo calculamos su producto escalar:  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ , como es 0, ambos vectores son perpendiculares.

**87.-**  $d(A, B) = |\overline{AB}| = \sqrt{(-6)^2 + (-8)^2} = 10$

**88.-**  $M = \left( \frac{2+4}{2}, \frac{-5+1}{2} \right) = (3, -2)$

**89.-** Para obtener un punto damos un valor a t:

para  $t = 0$  se tiene el punto  $A(-1, 0)$ .

Calculamos otro punto de la recta, por ejemplo con  $t = 1$ , con lo cual tenemos  $B(1, 5)$ ;

así, un vector director de la misma será:  $\vec{v} = \overline{AB} = (2, 5)$ .

La pendiente de la recta la obtenemos como:  $m = \frac{v_2}{v_1} = \frac{5}{2}$

**90.-** Tenemos:

$(x, y) = (3, 1) + t(5, -2)$ , que es la ecuación vectorial. De aquí:

$$\begin{cases} x = 3 + 5t \\ y = 1 - 2t \end{cases}, \text{ la ecuación en paramétricas.}$$

$$\frac{x-3}{5} = \frac{y-1}{-2}, \text{ ecuación de la recta continua.}$$

$$y-1 = \frac{-2}{5}(x-3), \text{ es la ecuación punto-pendiente.}$$

$$y = \frac{-2}{5}x + \frac{11}{5}, \text{ que es la ecuación explícita. Y finalmente}$$

$$2x + 5y - 11 = 0, \text{ que es la ecuación general o implícita.}$$

**91.-** Obtenemos en primer lugar un vector director de la misma:  $\vec{v} = \overline{AB} = (7, -5)$ , la

pendiente será, por lo tanto,  $m = -\frac{5}{7}$ , De esta forma

$$y-1 = -\frac{5}{7}(x-4) \rightarrow 7y-7 = -5x+20 \rightarrow 5x+7y-27=0$$

que es la ecuación general solicitada.

**92.-** Bastará con sustituir en las ecuaciones y comprobar si se cumplen las igualdades:

a)  $-6 \neq -3$ , con lo que no pertenece.

b)  $20 - 18 - 2 = 0$ , con lo que sí pertenece.

**93.-** Escribimos ambas ecuaciones en su forma general:

$$r \equiv 4x - 5y - 2 = 0 \text{ y } s \equiv 2x - y - 4 = 0. \text{ Comprobamos su posición relativa: } \frac{4}{2} \neq \frac{-5}{-1},$$

con lo cual son secantes. Para hallar su punto de corte resolvemos el sistema,

$$\text{obteniendo el punto } P\left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right).$$



94.- a)  $\frac{4}{2} = \frac{-6}{-3} \neq \frac{10}{4}$ , luego son paralelas.

b)  $\frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{6}{18}$ , son coincidentes.

95.- La recta  $r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{3}$  tiene pendiente  $m = -3$ . Con lo cual, la ecuación de la recta pedida es:  $y - 2 = -3x$ .

### Ampliación

96.- Tenemos que:  $\vec{a} = (0, 2), \vec{b} = (2, -2), \vec{c} = (0, 4), \vec{d} = (6, 0)$ . Así:

$$\vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} \rightarrow (0, 4) = (0, 2\alpha) + (2\beta, -2\beta) \rightarrow \alpha = 2, \beta = 0 \rightarrow \vec{c} = 2\vec{a}$$

$$\vec{d} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} \rightarrow (6, 0) = (0, 2\alpha) + (2\beta, -2\beta) \rightarrow \alpha = 3, \beta = 3 \rightarrow \vec{d} = 3\vec{a} + 3\vec{b}$$

97.- Tenemos:

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{4a+3}{5 \cdot \sqrt{a^2+1}} \rightarrow 5 \cdot \sqrt{a^2+1} = \sqrt{2}(4a+3) \rightarrow 25a^2 + 25 = 32a^2 + 18 + 48a \rightarrow 7a^2 + 48a - 7 = 0$$

donde obtenemos como soluciones  $a_1 = \frac{1}{7}$  y  $a_2 = -7$ .